مجلة جامعة الملك سعود، م ٩، العلوم الإدارية (١)، ص ص ٦٣ - ٧٦، الرياض (١٤١٧هـ / ١٩٩٧م).

نموذج اللوغارتم الطبيعي للأخطار المتنافسة

محمود حسين اليوسف
المؤسسة العامة للتأمين والمعاشات، دمشق، الجمهورية العربية السورية

(قُدِّم للنشر في ٣٠/٤/١٤١٥هـ، وقُبِل للنشر في ١٠/٧/١٤١٦هـ)

ملخص البحث. إن التطبيقات الإحصائية لنظرية اختبارات الحياة تناقش موضوعًا حيويًا تكثر فيه الدراسات ويلقى تطبيقه اهتمامًا متزايدًا في مجالات الحياة العملية. ولقد استخدمت الدراسات الخاصة بنظرية الأخطار المتنافسة معظم التوزيعات الإحصائية المعروفة، دون أن يتطرق أيًّا منها لتوزيع اللوغارتم الطبيعي.

إن الهدف من هذا البحث هو تصميم نموذج اللوغارتم الطبيعي للأخطار المتنافسة باعتماد الطريقة المعلمية في التقدير وإيجاد المقدرات الخاصة للمعلمات المستخدمة ودراسة خصائص هذه المقدرات، حيث تناولت الدراسة مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمات النموذج والمصفوفة المقاربة للتغاير. ولقد أثبت الباحث أن النموذج يحقق توزيعات لوغارتمية طبيعية لدالة البقاء على قيد الحياة وللدوال الباطنية للبقاء على قيد الحياة، كما قام الباحث بإيجاد الصيغ الخاصة بتقدير الاحتمالات الإجمالية للموت والاحتمالات الصافية للموت، وأجرى مقارنة بين النتائج التي يمكن الحصول عليها باستخدام هذه الصيغ مع النتائج التي يمكن الحصول عليها باستخدام طرق غير معلمية وذلك باستخدام الحاسب الآلي.

المقدمة

لما كانت التطبيقات الإحصائية لنظرية اختبارات الحياة في مجالات البحث العلمي تستخدم الحيوانات والأجهزة الميكانيكية والكهربائية وتولي ذلك اهتمامًا يفوق اهتمامها بالتطبيق على الجنس البشري في كثير من الأحيان، فقد رأينا أن نستخدم كلمة موت في هذا البحث للتعبير عن وفاة الجنس البشري أو نفق الجنس الحيواني أو أيضًا إخفاق الأجهزة الميكانيكية والكهربائية[١].

لنفرض أن مجتمعًا يتعرض لمجموعة من الأخطار المتنافسة $C_1,C_2,..C_n$ بحيث إن أفراد هذا المجتمع يتعرضون للموت بواحد من هذه الأخطار ولنخصص الرمز T_j للمتغير العشوائي الذي يمثل لحظة الموت عندما يكون هذا الموت بتأثير الخطر C_j حيث $j = 1,2,..n$.

وبما أن هذه الأخطار تمثل في الوقت نفسه أسبابًا للموت لذلك فإن قولنا بأن الخطر C_j كان هو سبب الموت يرادف قولنا إن الموت كان بتأثير السبب C_j .

إن نظرية الأخطار المتنافسة تهتم بالإجابة عن كثير من التساؤلات المطروحة في هذه الحالة، وأهم هذه التساؤلات [٢، ص٢٧٠]:

ما هو احتمال الموت بتأثير بعض هذه الأخطار؟

إذا استطعنا حذف بعض هذه الأسباب، فما هو تأثير ذلك على الأخطار المتبقية؟

ما هو المعدل الآني للموت الذي يمكن إسناده لكل سبب من هذه الأسباب؟.

إن النماذج الإحصائية للأخطار المتنافسة تساعدنا في الإجابة عن هذه التساؤلات، وتمدنا بالمقدرات اللازمة للتقدير، كما تساعدنا في دراسة خصائص هذه المقدرات.

إن الدراسات التي تناولت هذا الموضوع كان منها دراسات اعتمدت على الطريقة اللامعلمية في التقدير مثل Kimball [٣]، Froda and Luong [٤] وكان منها دراسات اعتمدت على الطريقة المعلمية في التقدير مثل Moeschlberger and David [٥] وBaucroft [٦] وأما Chiang [٧] فقد توصل إلى نتائجه بعد مزج الطريقتين السابقتين معًا.

ولتصميم نماذج للأخطار المتنافسة فقد اقترح Gail [٨] الدالة الاحتمالية التالية:

$$S(t_1,t_2,..t_n) = P[T_1 \geq t_1, T_2 \geq t_2,..T_n \geq t_n] \qquad (١)$$

والفرضية الأساسية لنظرية الأخطار المتنافسة هي أن حذف السبب C_i لا يؤثر على التركيب البنائي للدالة (١) وأن التأثير الوحيد لذلك هو وضع العدد صفر بدلاً من T_1 في صيغة هذه الدالة.

وحيث إنه يمكننا مراقبة زمن الحياة للمتغير $T_i^l=T/T_i=\mathrm{Min}_l\,(T_l)$ وسبب الموت الخاص به دون أن نتمكن من مراقبة زمن الحياة للمتغير T_i وذلك من أجل $j=1,2,...n$ لذلك نقول إن التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات $T_1,T_2,...,T_n$ تشكل توزيعات باطنية للنموذج [٥].

إن التوزيعات الإحصائية الأساسية في اختبارات الحياة كالتوزيع الأسي وتوزيع وايبل وتوزيع جومبيرتز والتوزيع الطبيعي استخدمت جميعها كتوزيعات باطنية للأخطار المتنافسة في العديد من

الـدراسـات آنفـة الذكر، ولما كان توزيع اللوغارتم الطبيعي هو من التوزيعات الإحصائية المهمة المستخدمة في اختبارات الحياة وفي مختلف المجالات التطبيقية بشكل عام [٩، ص١٤]. ولم يكن لهذا التوزيع أي نصيب في الدراسات السابقة فقد رأينا أن إدخال هذا النموذج في مجال الأخطار المتنافسة يكون مفيدًا.

النموذج المقترح وخصائصه الأساسية

١ ـ الصيغة المقترحة للدالة (١)

لنفرض أن الدالة (١) تأخذ الصيغة التالية:

$$S(t_1,t_2,..t_n) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sigma}\ln[\bar{e}^{\theta_1}t_1 + \bar{e}^{\theta_2}t_2 + ... + \bar{e}^{\theta_n}t_n]) \qquad (٢)$$

حيث رمزنا بالرمز $\phi(n)$ للدالة التجميعية للتوزيع الطبيعي وبفرض أن $\phi_1,\phi_2,..,\phi_n,\sigma$ معلمات موجبة.

٢ ـ دالة التوزيع للبقاء على قيد الحياة في النموذج المقترح

إذا افترضنا أن أفراد المجتمع يتعرضون لجميع الأسباب فإن دالة البقاء على قيد الحياة في الزمن t تعطى بالصيغة التالية:

$$S(t) = [S(t_1,t_2,..t_n)]_{t_j} = t;\ \forall_j$$

وبالتالي فإننا نجد أن:

$$S(t) = 1 - \Phi(\frac{\ln t - \Delta}{\sigma}) \qquad (٣)$$

وذلك بفرض أن:

$$\Delta = -\ln(\bar{e}^{\theta_1} + \bar{e}^{\theta_2} + ... + \bar{e}^{\theta_n}) \qquad (٤)$$

والعلاقة (٢) تؤكد بأن البقاء على قيد الحياة في المجتمع الذي يتعرض لجميع الأخطار يتوزع وفق نموذج اللوغارتم الطبيعي.

٣ ـ المعدل الآني للموت

يعرف المعدل الآني للموت $\mu(t)$ في اللحظة t بالعلاقة:

$$\mu(t) = -\frac{d}{dt}\ln S(t)$$

وبالتالي نجد أن

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} \bar{e}^{\frac{(\ln t - \Delta)^2}{2\sigma^2}} .[S(t)]^{-1} \tag{٥}$$

٤ ـ المعدل الآني الخام للموت

يعرف المعدل الآني الخام للموت $u_j(t)$ بسبب الخطر C_j وفي اللحظة t بالعلاقة :

$$U_j(t) = -\left[\frac{\partial}{\partial t_j} \ln S(t_1, t_2..t_n)\right]_{t_k = t; \forall k}$$

وبالتالي فإننا نجد أن :

$$U_j(t) = e^{\Delta - \theta_j} \mu(t) \qquad ; j = (1,2,\ldots n) \tag{٦}$$

٥ ـ دوال التوزيع الباطنية للبقاء على قيد الحياة[1]

إذا افترضنا أن أفراد المجتمع يتعرضون للسبب C_j فقط دون باقي الأسباب فإن دالة التوزيع الباطنية المتعلقة بهذا السبب هي :

$$S_j(t) = [S(t_1, t_2, .. t_n)]_{t_j = t \text{ and } t_k = 0; \forall k \neq j}$$

وبالتالي نجد أن :

$$S_j(t) = 1 - \phi\left(\frac{\ln t - \theta_j}{\sigma}\right) ; \ j = 1,2,..n \tag{٧}$$

وهـذه العـلاقـة تؤكد بأن دوال التوزيع الباطنية للبقاء على قيد الحياة تحقق أيضًا نموذج اللوغارتم الطبيعي .

٦ ـ المعدل الآني الصافي للموت

يعرف المعدل الآني الصافي للموت $\mu_j(t)$ للخطر C_j وفي اللحظة t بالعلاقة :

---

(١) نعني بالتـوزيعـات البـاطنية : Underlying distributions ، وهي مغـايرة للتـوزيعـات الهـامشية Marginal distributions .

$$\mu_j(t) = -\frac{d}{dt}\ln S_j(t)$$

وبالتالي نجد أن:

$$\mu_j(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} e^{-\frac{(\ln t - q_j)^2}{2s^2}} .[S_j(t)]^{-1} \tag{٨}$$

٧ ـ احتمال الموت

إن الاحتمال الشرطي q لموت فرد في المجتمع الذي يتعرض أفراده لجميع الأخطار في الفترة [a,b] إذا علم أن الفرد حيًّا في بداية الفترة يعطى بالعلاقة:

$$q = \int_a^b \mu(t)[S(t) / S(a)]dt$$

وبالتالي نجد أن:

$$q = 1 - S(b) / S(a) \tag{٩}$$

٨ ـ الاحتمالات الخام للموت

إن الاحتمال الشرطي لموت فرد من المجتمع بسبب الخطر C_j في الفترة [a,b] إذا كان حيًّا في بداية الفترة هو الاحتمال الخام للموت بالسبب C_j ويعطى بالعلاقة:

$$Q_j = \int_a^b u_j(t)[S(t) / S(a)]dt$$

وبالتالي فإننا نجد أن:

$$Q_j = e^{\Delta - \theta j}.q \tag{١٠}$$

٩ ـ الاحتمالات الصافية للموت

يعرف الاحتمال الشرطي q_j لموت فرد في المجتمع الذي يتعرض أفراده للخطر C_j في الفترة [a,b] إذا علم أن الفرد كان حيًّا في بداية الفترة بأنه الاحتمال الصافي للموت بالسبب C_j ويعطى بالعلاقة:

$$q_j = \int_a^b \mu_j(t)[S_j(t) / S_j(a)]dt$$

وبالتالي نجد أن :

$$q_j = 1 - S_j(b) / S_j(a) \quad (١١)$$

تقدير المعلمات والاحتمالات

١ ـ تقدير المعلمات

نفترض أن الباحث لديه معلومات عينة كاملة[٢] عن عدد الموتى وزمن الموت لجميع أسباب الموت، فإذا كان حجم هذه العينة هو N ورمزنا بالرمز d_j لعدد الموتى بالسبب C_j وبالرمز t_{ij} لزمن موت العنصر i بالسبب C_j فإننا نفترض أن جميع t_{ij} حيث $j=1,2,..,n$ و $i=1,2,..,d_j$ معروفة لدينا. إن دالة الإمكان الأعظم تكون في هذه الحالة :

$$L = \binom{N}{d_1 d_2 \ldots d_n} \prod_{i=1}^{n} \prod_{i=1}^{dj} U_j(t_{ij}).S(t_{ij})$$

وباستخدام العلاقات (٥) و(٦) نجد أن

$$\ln L \alpha N\Delta - \sum_{j=1}^{n} d_j \theta_j - N \ln \sigma - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d_j} \ln t_{ij} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d_j} (\ln t_{ij} - \Delta)^2$$

وبالاشتقاق نجد :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = -d_j + e^{\Delta - \theta_j} \left[N + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d_k} (\ln t_{ik} - \Delta \right] \quad j = 1,2,..n$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d_k} (\ln t_{ik} - \Delta)^2$$

ولحل مجموعة المعادلات الناتجة عن مساواة المشتقات الجزئية السابقة بالصفر يمكننا ملاحظة أن :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d_j} (\ln t_{ik} - \Delta)$$

---

(٢) عينة كاملة تعني عينة غير مراقبة أي Complete (Uncensored) sample .

وبالتالي فإن مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمات هي :

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d_j} \ln t_{ij} \qquad (١٢)$$

$$\hat{\theta}_j = \hat{\Delta} - \ln\frac{d_j}{N} \qquad (١٣)$$

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d_j}(\ln t_{ij} - \hat{\Delta})^2 \qquad (١٤)$$

٢ ـ خصائص المقدرات

إن المقدرات السابقة تتصف بالخصائص التالية [١٠، ص١٦٦؛ ١١]:

(ا) المقدر $\hat{\Delta}$ هو مقدر غير منحاز حيث إن $E(\hat{\Delta}) = \Delta$ **(١٥)**

ويحقق هذا المقدر توزيعًا طبيعيًا بتباين : $V(\hat{\Delta}) = \sigma^2 / N$ (١٦)

(ب) المقدر S^2 هو مقدر منحاز حيث إن : $E(S^2) = \frac{N-1}{N}\sigma^2$ (١٧)

ويحقق المتغير $\frac{NS^2}{(N-1)\sigma^2}$ توزيع X^2 بدرجات حرية $(N-1)$ وبالتالي

فإن
$$V(S^2) = \frac{2(N-1)}{N^2}\sigma^4 \qquad (١٨)$$

(جـ) المقدرات $\hat{\theta}_j$ هي أيضًا مقدرات غير منحازة .

البرهان

بما أن الباحث لديه معلومات عينة كاملة فلذلك ينبغي علينا أن نعتبر الفترة الزمنية $]o,\infty[$ ، كما أنه يكون لدينا :

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = N$$

إن الاحتمالات الخام للموت تصبح في هذه الحالة :

$$\pi_j = e^{\Delta - \theta_j} \quad ; \quad j = 1, 2, .. n$$

وحيث إنه يمكننا تقدير الكميات :

$$\ln \pi_j \qquad ; \quad j = 1, 2, .. n$$

باستخدام المقدرات :

$$\ln(d_j / N) \quad ; \; j = 1,2,..n$$

وحيث إن هذه المقدرات هي مقدرات الإمكان الأعظم فبمقتضى النظرية العامة لمقدرات الإمكان الأعظم [١٢] يمكننا اعتبارها مقدرات غير منحازة وتحقق بشكل تقريبي التوزيع الطبيعي . وبالتالي يكون لدينا :

$$E[\ln(d_j / N)] = \ln \pi_j = \Delta - \theta_j$$

وبما أن :

$$\hat{\theta}_j = \hat{\Delta} - \ln(d_j / N)$$

فإنه يكون :

$$E(\hat{\theta}_j) = E(\hat{\Delta}) - E[\ln(d_j / N)] = \theta_j$$

(د) المصفوفة المقاربة للتغاير هي :

$$V = \left[Y_{jk}\right]^{-1}$$

حيث يكون لدينا :

$$Y_{jj} = E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_j^2}\right) = Ne^{\Delta-\theta_j}\left[1 - e^{\Delta-\theta_j}\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)\right] \;; j = 1,2..n$$

$$Y_{jk} = E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_j \partial \theta_k}\right) = -Ne^{2\Delta-\theta_j-\theta_k}\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) \;; j \neq k$$

وبالتالي فإن المصفوفة المقاربة للتغاير يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$V = \frac{1}{N}[Z - W]^{-1} \qquad (١٩)$$

وذلك بفرض أن :

$$Z = e^{\Delta}\left[\delta_{jk}\right] ;\delta_{jj} = e^{-\theta_j} \;;\delta_{jk} = 0 \;; j,k = 1,2..n \;; j \neq k$$

$$W = \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)e^{2\Delta}\left[w_{jk}\right] ; w_{jk} = e^{-\theta_j-\theta_k} \;; j,k = 1,2,..n$$

٣ ـ تقدير الاحتمالات

باستخدام الصيغ (٩) و(١٠) و(١١) وبعد تبديل المقدرات الخاصة بالمعلمات فإننا

نجد أن :

$$\hat{q} = \left[\phi\left(\frac{\ln b - \hat{\Delta}}{S}\right) - \phi\left(\frac{\ln a - \hat{\Delta}}{S}\right)\right] \Big/ \left[1 - \phi\left(\frac{\ln a - \hat{\Delta}}{S}\right)\right] \qquad (٢٠)$$

$$\hat{Q}_j = e^{\hat{\Delta}-\hat{\theta}_j}.\hat{q} \qquad (٢١)$$

$$\hat{q}_j = \left[\phi\left(\frac{\ln b - \hat{\theta}_j}{s}\right) - \phi\left(\frac{\ln a - \hat{\theta}_j}{s}\right)\right] \Big/ \left[1 - \phi\left(\frac{\ln a - \hat{\theta}_j}{s}\right)\right] \qquad (٢٢)$$

تطبيق عددي

لتقـويم النتائج التي يزودنا بها النموذج المقترح يلزمنا بيانات زمنية ناتجة عن موت عناصر عينة تتعرض لخطرين على الأقل من الأخطار المسببة للموت، وحيث إن الباحث لايمتلك بيانات فعلية لهذه الغاية فقد لجأ إلى طريقة متعارف عليها إحصائيًا، وهي توليد عينة من البيانات باستخدام الحاسب الآلي تحقق توزيع اللوغارتم الطبيعي على افتراض أن حجم العينة $N=40$ وأن أفراد هذه العينة يتعرضون فقط لخطرين متنافسين أي $n=2$. إن زمن المـوت لأفـراد العينـة التي قام الباحث بتوليدها لتمثيل المجتمع الذي يحقق توزيع اللوغارتم الطبيعي بمعلمتين $\Delta=1$ و $\sigma^2=3$ يوضحها الجدول التالي :

جدول رقم (١). زمن المـوت لعينـة مولدة باستخدام الحاسب الآلي تحقق توزيع اللوغارتم الطبيعي بمعلمتين $\Delta=1$ و $\sigma^2=3$ ومعرضة لخطر الموت بسببين.

زمن الموت بالسبب الأول						زمن الموت بالسبب الثاني	
٠,١٢	٠,٤٥	١,٢٧	٣,٤٤	٧,٤٩	١٩,٠٧	٠,١٨	٢,٧٥
٠,١٥	٠,٥٦	١,٤١	٣,٦٢	٨,٠٥	٢٥,٠٢	٠,٤٢	٤,٩٥
٠,٢٣	٠,٦١	١,٧٥	٤,٨٥	١٠,٧٣	٣٧,٥٧	٠,٥٧	٧,٥٦
٠,٣٠	٠,٨٣	٢,٠٢	٥,١٧	١٣,٢٢	٥٤,٨٦	٠,٩٨	١٤,٠٥
٠,٣٩	٠,٩٥	٢,٥٣	٦,٨٤	١٦,٨٥	٧١,٥٨	١,٥٣	٣١,١٦

وباستخدام المقدرات التي أوجدناها فيما تقدم من هذا البحث نحصل على التقديرات التالية:

$$\hat{\Delta} = 0.9655;\ V(\hat{D}) = 0.0727;\ S^2 = 2.9077,\ V(S^2) = 0.4123;\ \hat{\theta} = 1.2532;\ V(\hat{\theta}_1) = 0.0810;\ \hat{\theta}_2 = 2.3518,\ V(\hat{\theta}_2) = 0.1477,\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 0.04769$$

وللاطمئنان على صحة النتائج التي نتوصل إليها باستخدام النموذج المقترح ومدى توافقها مع النتائج التي يمكن التوصل إليها باستخدام نماذج أخرى فقد قام الباحث بحساب تقديرات الاحتمالات الخام للموت والاحتمالات الصافية للموت باستخدام العلاقتين (٢١) و(٢٢) وقارن هذه التقديرات مع نتائج النموذجين التاليين:

(أ) نموذج Kimball [٣]

(ب) نموذج Chiang [٧]

إن الصيغة التي يقترحها النموذجان السابقان لتقدير الاحتمالات الخام للموت هي:

$$Q_j = \frac{D_j(a,b)}{N(a)};\ \ j = 1,2,\ldots,n \qquad (٢٣)$$

حيث $D_j(a,b)$ عدد الموتى بالسبب C_i خلال الفترة $[a,b]$، $N(a)$ عدد الأفراد المعرضين لخطر الموت في بداية تلك الفترة. وأما عند تقدير الاحتمالات الصافية للموت فإن النموذج الأول يقترح الصيغة:

$$q_j = \overline{Q_j} \Big/ \left(1 - \sum_{k \neq j} Q_k\right) \qquad (٢٤)$$

بينما يقترح النموذج الثاني الصيغة التالية(٣):

$$q_j = 1 - (1 - \sum Q_k)\ **\ (Q_j / \sum Q_k) \qquad (٢٥)$$

ويلخص الجدول التالي نتائج حساب التقدير.

---

(٣) نقصد بالرمز ** الرفع للأس.

جدول رقم (٢). تقدير الاحتمالات الخام للموت والاحتمالات الصافية للموت بالصيغ الخاصة بالنموذج وصيغ أخرى غير معلمية.

فئات العمر عند الموت		صفر-٠,٢٥	٠,٢٥-٠,٥	٠,٥-١	١-٢	٢-٤	٤-٨	٨-١٦	١٦-٣٢
الاحتمال الخام	(٢٣)	٠,٠٧٥٠	٠,٠٨٣٣	٠,١٢٥٠	٠,١١٥٤	٠,١٨١٨	٠,٢٣٥٣	٠,٢٧٢٧	٠,٤٢٨٦
للموت بالسبب الأول	(١١)	٠,٠٦٢٩	٠,٠٦٦٦	٠,١٠٨٣	٠,١٥٨٢	٠,٢١٤٤	٠,٢٧١٥	٠,٣٢٧٧	٠,٣٨٠١
الاحتمال الصافي	(٢٤)	٠,٠٧٦٩	٠,٠٨٥٧	٠,١٣٣٣	٠,١٢٠٠	٠,١٩٠٥	٠,٢٦٦٧	٠,٣٠٠٠	٠,٥٠٠٠
للموت	(٢٥)	٠,٠٧٦٠	٠,٠٨٤٥	٠,١٢٩٣	٠,١١٧٨	٠,١٨٦٤	٠,٢٥١٩	٠,٢٨٧٥	٠,٤٧٠٣
بالسبب الأول	(٢٢)	٠,٠٦٠٨	٠,٠٧٠٤	٠,١١٩٣	٠,١٨٢٦	٠,٢٥٣٩	٠,٣٣٠٨	٠,٤٠٦٠	٠,٤٠٣١
الاحتمال الخام	(٢٣)	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٧٨	٠,٠٦٢٥	٠,٠٣٨٥	٠,٠٤٥٥	٠,١١٧٦	٠,٠٩٠٩	٠,١٤٢٩
للموت بالسبب الثاني	(١١)	٠,٠٢١٠	٠,٠٢٢٢	٠,٠٣٦١	٠,٠٥٢٧	٠,٠٧١٥	٠,٠٩٠٥	٠,١٠٩٢	٠,١٢٦٧
الاحتمال الصافي	(٢٤)	٠,٠٢٧٠	٠,٠٣٠٣	٠,٠٧١٤	٠,٠٤٣٥	٠,٠٥٥٦	٠,١٥٣٨	٠,١٢٥٠	٠,٢٥٠٠
للموت	(٢٥)	٠,٠٢٦٠	٠,٠٢٩٠	٠,٠٦٦٩	٠,٠٤٠٩	٠,٠٥٠٣	٠,١٣٥١	٠,١٠٦٨	٠,١٩٠٩
بالسبب الثاني	(٢٢)	٠,٠١٤٢	٠,٠٢٣١	٠,٠٤٨٧	٠,٠٨٨٧	٠,١٤٤٣	٠,٢١١٠	٠,٢٨٥٨	٠,٣٦٢٠

خاتمة

استعرض الباحث في هذه المقالة المفاهيم الأساسية والاحتمالات المختلفة لموت عنصر من مجتمع إحصائي يتعرض لمجموعة من الأخطار المتنافسة، ثم اقترح صيغة احتمالية جديدة أمكن من خلالها تصميم نموذج إحصائي يحقق توزيع اللوغارتم الطبيعي لدالة البقاء على قيد الحياة كما يحقق أيضًا توزيعات اللوغارتم الطبيعي للدوال الباطنية للبقاء على قيد الحياة. وحيث إن الصيغة المقترحة تحتوي على معلمات يجب تقديرها فقد قام المؤلف بإيجاد المقدرات المطلوبة انطلاقًا من المعلومات المتوافرة عن البيانات المأخوذة من عينة كاملة حول عدد الموتى وزمن الموت لكل سبب من أسباب الموت. ثم استعرض خصائص هذه المقدرات والمصفوفة المقاربة للتغاير، كما تناولت الدراسة أيضًا الصيغ اللازمة لتقدير الاحتمالات الإجمالية للموت والاحتمالات الصافية للموت. واختتم الباحث مقالته بالتطبيق على بيانات تم توليدها باستخدام الحاسب الآلي مع مقارنة النتائج التي يمكن الحصول عليها باستخدام الصيغ المقترحة مع نتائج صيغ أخرى غير معلمية.

وتمتاز الطريقة المعلمية التي اعتمدها الباحث على الطريقة اللامعلمية بثلاث مزايا هي:

١ - إن الطريقة المقترحة على عكس الطريقة اللامعلمية لايتطلب تطبيقها أي تبويب للبيانات ومن المعروف أن البيانات تفقد الكثير من خصوصيتها عند التبويب.

٢ - إن الطريقة المقترحة تزودنا بنتائج يمكن أن نصفها بالنعومة عند مقارنتها بالنتائج المتذبذبة من فترة لأخرى التي تزودنا بها الطريقة اللامعلمية.

٣ - إن الطريقة المقترحة تزودنا بصيغ للتوزيعات الباطنية يمكن أن يكون لها فائدة كبيرة في الدراسة والتحليل في حين نجد أن الطريقة اللامعلمية تتجاهل ذلك تمامًا.

المراجع

[١] اليوسف، محمود حسين. بعض النماذج المتعلقة بخطرين متنافسين غير مستقلين، *مجلة العلوم الإدارية*، جامعة الملك سعود، م١٣ (١) (١٤٠٨هـ/١٩٨٨م)، ٣-٢٢.

[٢] Elandt-Johnson, R. C. and Johnson, N. L. *Survival Models and Data Analysis*. NewYork: J. Wiley, (1980).

[٣] Kimball, A. W. Models for the estimation of competing risks from grouped data, *Biometrics*, 25 (1969), 329-37.

[٤] Froda, S. and Luong, A. Nonparametric estimation for competing risks, *Aust. J. Statist*, 35 (1993), 175-183.

[٥] Moeschberger, M. L. and David, H. A. Life tests under competing causes of failure and the theory of competing risks, *Biometrics*, 27 (1971), 909-33.

[٦] Bancroft, C. L. and Dunsmore, I. R. Predictive distributions in life tests under competing causes of failure, *Biometrika,* 63 (1976), 195-8.

[٧] Chiang, C. L. Competing risks and conditional probabilities, *Biometrics* 26 (1970), 767-76.

[٨] Gail, M. A review and critique of some models used in competing risks analysis, *Biometrics,* 31 (1975), 209-22.

[٩] Miller, J. *Survival Analysis.* New York: J. Wiley, (1981).

[١٠] Hogg, R. and Craig, A. *Introduction to Mathematical Statistics.* New York: MacMillan Company, (1971).

[١١] Auda, A. Some estimators for the coefficient of variation of the lognormal distribution, *Proceedings of the 15th International Conference for Statistics, Ain Shams University,* (1990).

[١٢] Mann, N. R., Schafer, R. E. and Singpurwalla, N. D. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data.*, NewYork: John Wiley & Sons, (1974).

The Lognormal Model for Competing Risks

M.H. Al-Yousef
The Institution of Insurance and Pension, Damascus, Syria

(Received on 30-4-1415; accepted for publiction on 10-7-1416 A.H.)

Abstract. In this paper we suggest the lognormal distribution for modelling the competing risks. The theoretical principles of this model are shown. The estimators of the crude and net probabilities of death are derived. Their estimators are evaluated by using simulated data from lognormal distribution. The paper includes comparison between the proposed model and other nonparametric models.