مجلة جامعة الملك سعود، م ٤، العلوم الإدارية (٢)، ص ص ٥١٧ ـ ٥٣٦ (١٤١٢هـ / ١٩٩٢م)

قيمة المعلومات الإضافية في نموذج تنافسي بين شركتين محتكرتين

إبراهيم أحمد مخلوف

أستاذ مشارك، قسم الأساليب الكمية، كلية العلوم الإدارية،

جامعة الملك سعود، الرياض ـ المملكة العربية السعودية

(قدم للنشر في ١٤/٦/١٤١١هـ، وقبل للنشر في ١٩/١١/١٤١١هـ)

ملخص البحث. نفرض في هذه المقالة أن لدينا شركتين تحتكران إنتاج وتسويق منتج معين، وقد تم صياغة ذلك في صورة لعبة ثنائية غير صفرية، تتكون من خطوتين شخصيتين، وبناء على ذلك نبين أولاً كيفية تقدير قيمة المعلومات الإضافية لكل شركة عندما تتحول من نظام معين للمعلومات إلى نظام آخر، ثم نقدم تطبيقاً خاصاً عندما تكون دالة عرض المنتج خطية، وفي هذه الحالة نبين أنه لا يوجد حافز لدى أي من الشركتين للحصول على معلومات عن الكمية التي تعرضها الشركة الأخرى، وقد تمت الاستعانة بمثال رقمي لتوضيح المفاهيم التي تتضمنها المقالة.

المقدمـة

في نظرية القـرارات (decision theory) عنـدمـا يوجـد متخذ قرار واحد يتم تقدير قيمة المعلومات الإضافية عن سلوك الأحداث (events) باستخدام القيمة المتوقعة للمعلومات التامة (expected value of perfect information) وهي الفرق بين العائد المتوقع في حالة عدم التأكد uncertainty أي في ضوء التوزيع الاحتمالي المبدئي، والعائد المتوقع في حالة التأكد الكامل [١ ؛ ص ص١٠٧ـ١٠٩]. ولكن عندما يوجد أكثر من متخذ قرار أي في المبـاريات الاستراتيجية (games of strategy) لا يتم تقدير قيمة المعلومات الإضافية عن سلوك الطرف أو الأطراف الأخرى، وذلك لأننا نفترض في المباريات الاستراتيجية أن نمط المعلومات (pattern of information) ثابت لا يتغير في موقف معيّن [٢ ؛ ص ص٣٣ـ٨٠].

وسنحاول في هذا المقال الاستفادة من مفهوم القيمة المتوقعة للمعلومات التامة لتقدير قيمة المعلومات الإضافة، نتيجة معرفة تصرف الشركة الأخرى عند وجود شركتين محتكرتين في المباراة الثنائية غير الصفرية (two person non zero-sum game) ، ويتم ذلك بتقويم موقف كل شركة عندما تتخذ قرارها في حالة معرفة أو عدم معرفة قرار الشركة الأخرى. وسنفرض إمكانية تغيير مجموعات المعلومات information sets وترتيب اللعب order of play في الموقف محل الدراسة، وبالتالي تغيير نمط المعلومات.

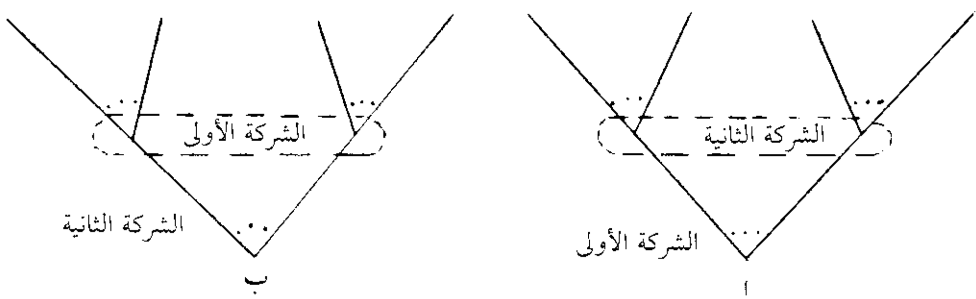
وينقسم هذا المقال إلى جزءين، يتناول الجزء الأول بيان كيفية تقدير قيمة المعلومات الإضافية لكل شركة، عندما تتحول من نمط معين للمعلومات إلى نمط آخر، وذلك بإيجاد الفرق بين قيمتي المباراة value of the game في النمطين، ونقدم في الجزء الثاني تطبيقا خاصا حيث نبين أنه إذا كانت لدينا شركتان تحتكران إنتاج وتسويق منتج معين، وكانت دالة عرض المنتج خطية فإن قيمة المباراة للشركة لا تتغير عندما تتخذ قرارها في حالة معرفة أو عدم معرفة قرار الشركة الأخرى، ويترتب على ذلك عدم وجود حافز لدى أي من الشركتين للحصول على معلومات عن الكمية التي تعرضها الشركة الأخرى، وفي نهاية كل جزء سنستعين بمثال رقمي توضيحي.

تقدير قيمة المعلومات الإضافية

سنفرض أن لدينا شركتين تحتكران إنتاج وتسويق منتج معيّن، وأن قرار أي منهما تجاه سياسة إنتاجية أو تسويقية معينة يؤثر على عائد كل منهما، ويمكن صياغة ذلك في صورة مباراة ثنائية غير صفرية، تتكون من تحركات أو تصرفات شخصية (personal moves) . يمكن أن تنشأ في هذا الموقف ثلاث حالات ممكنة بخصوص المعلومات المتاحة لكل شركة عن تصرف الشركة الأخرى، تقابل كل حالة منها نمطا معينا للمعلومات وقيمة للمباراة لكل شركة وسنوضح ذلك فيما يلي:

الحالة الأولى. تختار كل من الشركتين تصرفها أو تحركها في جميع المراحل دون علم كل منهما بتصرف الأخرى، ويمثل ذلك مباراة ذات معلومات غير تامة (imperfect informations) ويمكن تمثيلها بشجرة المباراة (game tree) كما في الشكل رقم ١ (ا، ب).

وفي هذه الشجرة تمثل الفروع في الخطوة الأولى البدائل الممكنة لإحدى الشركتين وتمثل الفروع في الخطوة الثانية البدائل الممكنة للشركة الأخرى، وتُكوِّن كل العقد nodes في الخطوة الثانية مجموعة معلومات واحدة؛ ويعني ذلك أن الشركة التي تختار تصرفها في الخطوة الثانية لا تعلم العقدة التي تقع فيها، لأنها لا تعلم تصرف الشركة الأخرى الذي اختارته في الخطوة الأولى، ولذلك يتم تمثيل مجموعة المعلومات في الخطوة الثانية بمنحنى مغلق يضم جميع العقد [**٣**؛ ص ص٤١-٤٣].



شكل رقم ١

ولتكوين الشكل الطبيعي (normal form) المقابل لهذه الحالة نفرض أن البدائل الممكنة لكل شركة هي الاستراتيجيات المتاحة أمام هذه الشركة، وأن عدد الاستراتيجيات المتاحة أمام الشركة الأولى هو m وأن عدد الاستراتيجيات المتاحة أمام الشركة الثانية هو n ، وسنهتم أولاً بالشكل الطبيعي بدلالة عائد الشركة الأولى، فنفرض أن a_{ij} هو عائد الشركة الأولى إذا اختارت الاستراتيجية i واختارت الشركة الثانية الاستراتيجية j ، ومن هذا الشكل نجد أن الشركة الأولى تختار i وهي تتوقع أن الشركة الثانية تختار j بطريقة تجعل a_{ij} أقل ما يمكن، وهي تختار i التي تضمن لها الحصول على الأقل على المقدار:

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} \qquad (1)$$

ومن ناحية أخرى تختار الشركة الثانية j وهي تتوقع أن الشركة الأولى تختار i بطريقة

تجعل a_{ij} أكبر ما يمكن، وهي تختار j التي تضمن أن عائد الشركة الأولى سوف لا يزيد عن المقدار:

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} \qquad (2)$$

وحيث إن هذا الموقف ذو معلومات غير تامة فإن قيمة المباراة للشركة الأولى في هذه الحالة والتي سنشير لها بالرمز $V_1(1)$ تكون كالتالي:

$$\begin{aligned} V_1(1) &= \min_{j} \max_{i} \sum_{ij} \sum a_{ij} x_i y_j \\ &= \max_{i} \min_{j} \sum_{ij} \sum a_{ij} x_i y_j \\ &= \sum_{j} a_{ij} x_i^* y_j^* \qquad (3) \end{aligned}$$

حيث $X^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_m^*), Y^* = (y_1^*, \ldots, y_j^*, \ldots, y_n^*)$ هي المتجهات الاحتمالية التي تشير إلى الاستراتيجيات المختلطة المثلى optimal mixed strategies للشركة الأولى والثانية على الترتيب [٤، ٥].

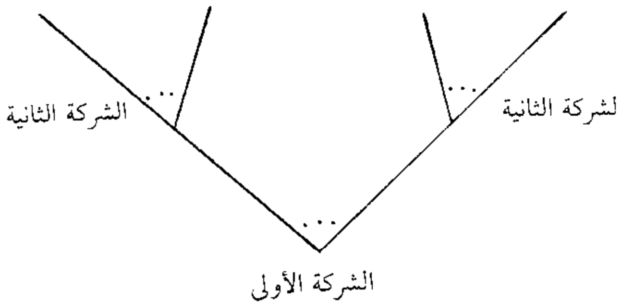
الحالة الثانية. وفي هذه الحالة نفرض أن الشركة الأولى تختار تصرفا معينا في الخطوة الأولى، وفي الخطوة الثانية تختار الشركة الثانية تصرفها، وهي تعلم تصرف الشركة الأولى، وهذه الحالة تمثل مباراة ذات معلومات تامة (perfect information)، ويمكن تمثيلها بشجرة المباراة كما في الشكل رقم ٢، وفيها تمثل الفروع في الخطوة الأولى البدائل المتاحة أمام الشركة الأولى، وتمثل الفروع في الخطوة الثانية البدائل المتاحة أمام الشركة الثانية، ويلاحظ أن كل عقدة في الخطوة الثانية في شجرة المباراة في الشكل رقم ٢ تمثل مجموعة معلومات منفصلة وذلك لأن الشركة الثانية تعلم تصرف الشركة الأولى، وبالتالي تعلم العقدة التي تبدأ منها الاختيار في الخطوة الثانية.

وفي الشكل رقم ٢ المقابل لهذا الموقف بدلالة عوائد الشركة الأولى تتضمن استراتيجية الشركة الأولى تحديد تصرف معين i بينما تتضمن استراتيجية الشركة الثانية تحديد

تصرف معين يعتمد على قيمة i فهو دالة في i ، أي أن j=f(i)[١] وبالتالي فإنه يمكن عرض الصيغتين المقابلتين لـ (2) و (1) كما يلي :

$$\max_{i}\min_{f(i)} a_{if(i)} \qquad (4)$$

$$\min_{f(i)}\max_{i} a_{if(i)} \qquad (5)$$



شكل رقم ٢

الحالة الثالثة. وهي تشبه الحالة الثانية مع تبديل موقعي الشركتين في الخطوة الأولى والثانية ويمكن تمثيلها بشجرة المباراة في الشكل رقم ٣، وفيها تمثل الفروع في الخطوة الأولى البدائل المتـاحة أمام الشركة الثانية، وتمثل الفروع في الخطوة الثانية البدائل المتاحة أمام الشركة الأولى. وفي الشكـل الـطبيعي المقابل لهذه الحالة بدلالة عوائد الشركة الأولى، تتضمن استراتيجية الشركة الثانية تحديد تصرف معين j بينما تتضمن استراتيجية الشركة الأولى تحديد تصرف معين i يعتمد على j فهو دالة في j أي أن i = f(j) وبالتالي يمكن عرض الصيغتين المقابلتين لـ (2) ،(1) كما يلي :

$$\max_{f(j)}\min_{j} a_{f(j)j} \qquad (6)$$

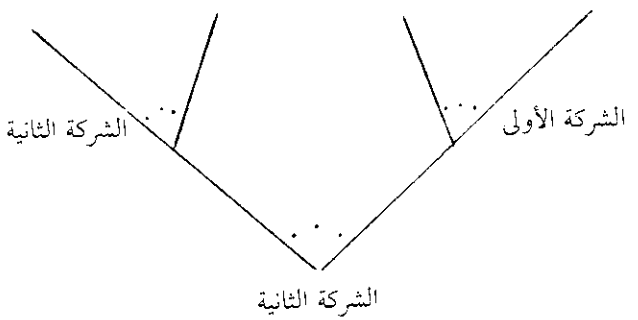
$$\min_{j}\max_{f(j)} a_{f(j)j} \qquad (7)$$

(١) أنظر مثال ١ .

ويلاحظ أن الحالة الثانية والحالة الثالثة تمثل أبسط حالات المباريات ذات المعلومات التامة التي تتكون من تصرفات شخصية، ولذلك نجد أن :

$$\max_{i} \min_{f(i)} a_{if(i)} = \min_{f(i)} \max_{i} a_{if(i)} \qquad (8)$$

$$\max_{f(j)} \min_{j} a_{f(j)j} = \min_{j} \max_{f(j)} a_{f(j)j} \qquad (9)$$



شكل رقم ٣

ولتحـديد العلاقة بين العوائد المتوقعة للشركة الأولى في الحالات الثلاث السابقة نستنتج من (1) ،(4)، (8) أن :

$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} = \max_{i} \min_{f(i)} a_{if(i)} = \min_{f(i)} \max_{i} a_{if(i)} = V_2(1) \qquad (10)$$

حيث $V_2(1)$ تشير إلى قيمة المباراة للشركة الأولى في الحالة الثانية. ومن (2) ،(7)، (9) نحصل على :

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} = \min_{j} \max_{f(j)} a_{f(j)j} = \max_{f(j)} \min_{j} a_{f(j)j} = V_3(1) \qquad (11)$$

حيث $V_3(1)$ تشير إلى قيمة المباراة للشركة الأولى في الحالة الثالثة.

وحيث إن موقف الشركة الأولى في الحالة الثالثة أفضل من أو يساوي موقفها في الحالة الأولى، وأن موقفها في الحالة الأولى أفضل من أو يساوي موقفها في الحالة الثانية فإن:

$$V_2(1) \leqslant V_1(1) \leqslant V_3(1) \qquad (12)$$

يلاحظ أننا تناولنا فيما سبق العائد المتوقع للشركة الأولى في الحالات الثلاث المذكورة، وبالمثل يمكن بيان العائد المتوقع للشركة الثانية في كل حالة فيما يلي:

الحالة الأولى. سنفرض أن لدينا الشكل الطبيعي بدلالة عوائد الشركة الثانية وأن b_{ji} هو عائد الشركة الثانية إذا اختارت التصرف j واختارت الشركة الأولى التصرف i ، وفي هذه الحالة يمكن للشركة الثانية أن تختار j بحيث تضمن الحصول على الأقل على المقدار:

$$\max_j \min_i b_{ji} \qquad (13)$$

ويمكن للشركة الأولى أن تختار i بحيث تضمن أن الشركة الثانية لا تحصل على أكثر من المقدار:

$$\min_i \max_j b_{ji} \qquad (14)$$

وتكون قيمة المباراة للشركة الثانية في هذه الحالة والتي نشير لها بالرمز $V_1(2)$ كالتالي:

$$V_1(2) = \min_i \max_j \sum_j \sum_i b_{ji} U_j Z_i$$

$$= \max_j \min_i \sum_j \sum_i b_{ji} U_j Z_i$$

$$= \sum_j \sum_i b_{ji} U_j^* Z_i^* \qquad (15)$$

حيث $U^* = (U_1^*, \ldots, U_j^*, \ldots, U_n^*)$ $Z^* = (Z_1^*, \ldots, Z_i^*, \ldots, Z_m^*)$ هي المتجهات الاحتمالية التي تشير إلى الاستراتيجيات المختلطة المثلى للشركة الثانية والأولى على الترتيب.

الحالة الثانية. في هذه الحالة يمكن للشركة الثانية أن تختار $j=f(i)$ بحيث تضمن الحصول

على الأقل على المقدار:

$$\max_{f(i)} \min_{i} b_{f(i)i} \tag{16}$$

ويمكن للشركة الأولى أن تختار i بحيث تضمن أن الشركة الثانية لا تحصل على أكثر من المقدار:

$$\min_{i} \max_{f(i)} b_{f(i)i} \tag{17}$$

الحالة الثالثة. في هذه الحالة يمكن للشركة الثانية أن تختار j بحيث تضمن الحصول على الأقل على المقدار:

$$\max_{j} \min_{f(j)} b_{jf(j)} \tag{18}$$

ويمكن للشركة الأولى أن تختار $i=f(j)$ بحيث تضمن أن الشركة الثانية لا تحصل على أكثر من المقدار:

$$\min_{f(j)} \max_{j} b_{jf(j)} \tag{19}$$

وحيث إن كلا من الحالة الثانية والحالة الثالثة تمثل مباراة ذات معلومات تامة فإن:

$$\max_{f(i)} \min_{i} b_{f(i)i} = \min_{i} \max_{f(i)} b_{f(i)i}, \tag{20}$$

$$\max_{j} \min_{f(j)} b_{jf(j)} = \min_{f(j)} \max_{j} b_{jf(j)}, \tag{21}$$

ولتحديد العلاقة بين العوائد المتوقعة للشركة الثانية في الحالات الثلاث السابقة نستنتج من (14) و (17) و (20) أن:

$$\begin{aligned} \min_{i} \max_{j} b_{ji} &= \min_{i} \max_{f(i)} \; b_{f(i)i} = \min_{f(i)} \; \max_{i} b_{if(i)} \\ &= V_2(2) \end{aligned} \tag{22}$$

حيث $V_2(2)$ تشير إلى قيمة المباراة للشركة الثانية في الحالة الثانية. ومن (13) و (18) و (21) نحصل على:

$$\begin{aligned} \max_{j} \min_{i} b_{ji} &= \max_{j} \min_{f(j)} \; b_{jf(j)} = \mathrm{mjn}_{f(j)} \; \max_{i} b_{jf(j)} \\ &= V_3(2) \end{aligned} \tag{23}$$

حيث $V_3(2)$ تشير إلى قيمة المباراة للشركة الثانية في الحالة الثالثة.

وحيث إن موقف الشركة الثانية في الحالة الثانية أفضل من أو يساوي موقفها في الحالة الأولى، وأن موقفها في الحالة الأولى أفضل من أو يساوي موقفها في الحالة الثالثة فإن:

$$V_3(2) \leqslant V_1(2) \leqslant V_2(2) \qquad (24)$$

وبصفة عامة إذا كان

$$V_l(k) = V_r(k)$$

بالنسبة لشركة معيّنة k في الحالتين المختلفتين l,r فإن هذه الشركة سيان لديها أن تكون في الحالة l أو في الحالة r ، وإذا كان:

$$V_l(k) > V_r(k)$$

فإن موقف الشركة k سيكون أفضل في الحالة l عن الحالة r وبالتالي فإن هذه الشركة سيكون لديها حافز للتحول إلى الحالة l إذا كانت موجودة في الحالة r ، ويمثل الفرق بين قيمتي المباراة في الحالتين وهو:

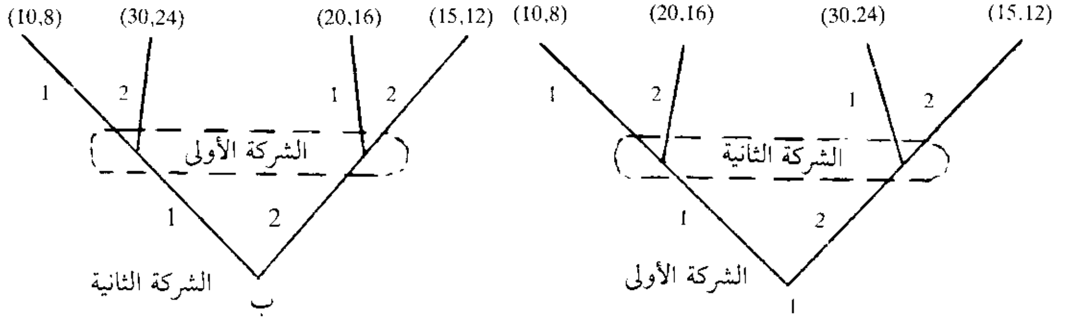
$$V_l(k) - V_r(k)$$

قيمة المعلومات الإضافية للشركة k نتيجة تحولها من الحالة r للحالة l .

ويلاحظ أنه يمكن إيجاد قيمة المباراة في الحالة الثانية، وفي الحالة الثالثة من الشكل الطبيعي للحالة الأولى وهي حالة المعلومات غير التامة، ويتضح ذلك من (10) و (11) ومن (22) و (23) .

مثـال ١

نفرض أن أمام كل شركة بديلين وأن شجرة المباراة في الحالة الأولى كما في الشكل رقم ٤ (ا، ب).



شكل رقم ٤

(يشير الرقم الأيسر في نهاية كل فرع في الشجرة إلى عائد الشركة الأولى، ويشير الرقم الأيمن إلى عائد الشركة الثانية).

الشكل الطبيعي بدلالة عوائد الشركة الأولى هو:

		استراتيجيات الشركة الثانية	
		1	2
استراتيجيات الشركة الأولى	1	10	20
	2	30	15

ومنه نجد أن:

$$\max_i \min_j a_{ij} = 15, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 20,$$

$$X^* = \left(\frac{3}{5} \quad \frac{2}{5}\right), \ Y^* = \left(\frac{1}{5} \quad \frac{4}{5}\right), \ V_1(1) = 18$$

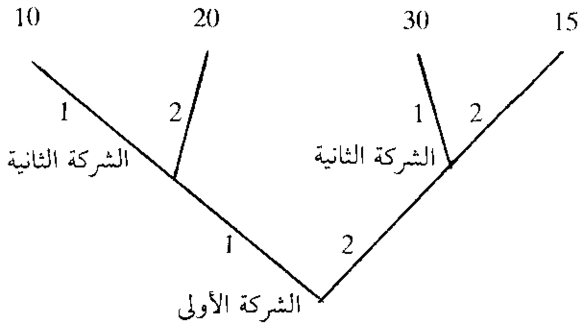
والشكل الطبيعي بدلالة عوائد الشركة الثانية هو:

		استراتيجيات الشركة الأولى	
		1	2
استراتيجيات الشركة الثانية	1	8	24
	2	16	12

ومنه نجد أن :

$$\max_j \min_i b_{ji} = 12, \ \min_i \max_j b_{ji} = 16,$$
$$U^* = \left(\tfrac{1}{5} \quad \tfrac{4}{5}\right), \ Z^* = \left(\tfrac{3}{5} \quad \tfrac{2}{5}\right), \ V_1(2) = 14.4$$

وفي الحالة الثانية تكون شجرة المباراة بدلالة عوائد الشركة الأولى كما في الشكل رقم ٥



شكل رقم ٥

والشكل الطبيعي المقابل لذلك هو:

استراتيجيات الشركة الثانية

	1	1	2	1	2
	2	1	1	2	2
استراتيجيات الشركة الأولى	1	10	20	10	20
	2	30	30	15	15

ومنه نجد أن :

$$\max_i \min_{f(i)} a_{if(i)} = \min_{f(i)} \max_i a_{if(i)} = V_2(1) = 15$$

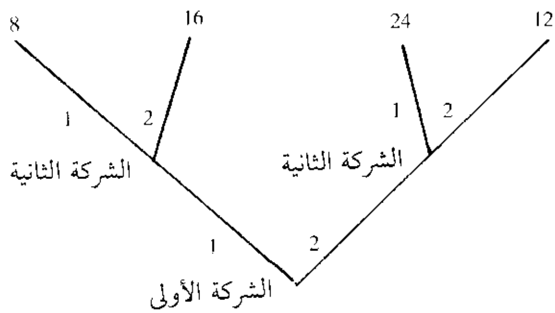
وشجرة المباراة بدلالة عوائد الشركة الثانية كما في الشكل رقم ٦

والشكل الطبيعي المقابل لذلك هو:

			استراتيجيات الشركة الأولى	
			1	2
	1	2		
استراتيجيات	1	1	8	24
الشركة	1	2	8	12
الثانية	2	1	16	24
	2	2	16	12

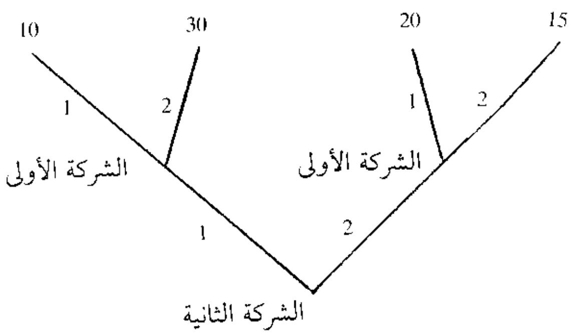
ومنه نجد أن :

$$\min_{i} \max_{f(i)} b_{f(i)i} = \max_{f(i)} \min_{i} b_{f(i)i} = V_2(2) = 16$$



شكل رقم ٦

وفي الحالة الثالثة تكون شجرة المباراة بدلالة عوائد الشركة الأولى كما في الشكل رقم ٧.



شكل رقم ٧

والشكل الطبيعي المقابل هو:

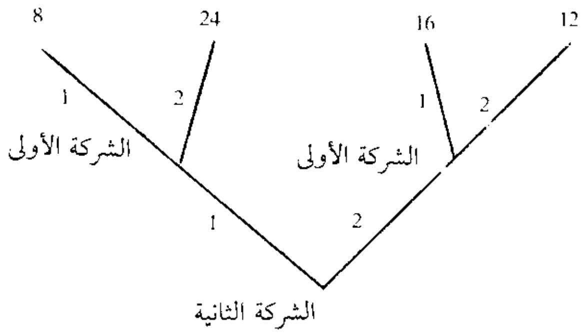
استراتيجيات الشركة الثانية

	1	2	1	2
استراتيجيات الشركة الأولى	1	1	10	20
	1	2	10	15
	2	1	30	20
	2	2	30	15

ومنه نجد أن :

$$\min_{j} \max_{f(j)} a_{f(j)j} = \max_{f(j)} \min_{j} a_{f(j)j} = V_3(1) = 20$$

وشجرة المباراة بدلالة عوائد الشركة الثانية كما في الشكل رقم ٨



شكل رقم ٨

والشكل الطبيعي المقابل هو:

استراتيجيات الشركة الأولى

$$\begin{array}{ll|cccc|}
 & & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
\text{استراتيجيات الشركة الثانية} & 1 & 8 & 8 & 24 & 24 \\
 & 2 & 16 & 12 & 16 & 12
\end{array}$$

ومنه نجد أن:

$$\min_{f(j)} \max_{j} b_{jf(j)} = \max_{j} \min_{f(j)} b_{jf(j)} = V_3(2) = 12$$

ولتقدير قيمة المعلومات الإضافية أو الحافز لكل شركة، نتيجة التحول من حالة معينة أو من نمط معين للمعلومات إلى حالة أخرى أو إلى نمط آخر، نوجد الفرق بين قيمتي المباراة لكل شركة في الحالتين، ونلخص النتائج التي حصلنا عليها لقيمة المباراة لكل شركة في الحالات الثلاث محل الدراسة في الجدول الآتي:

رقم الشركة k	$V_1(k)$	$V_2(k)$	$V_3(k)$
1	18	15	20
2	14.4	16	12

تطبيق خاص عندما تكون دالة عرض المنتج خطية

سنفرض أن لدينا شركتين تحتكران إنتاج وتسويق منتج معيّن، وأن كمية عرض أي منهما في السوق تؤثر على سعر هذا المنتج، وبالتالي تؤثر على عائد كل منهما، وسنفرض أن دالة عرض المنتج في الصورة التالية:

$$p(q_1,q_2)=a-b(q_1+q_2) \qquad a,b>0 \tag{25}$$

حيث $p(q_1,q_2)$ تشير إلى سعر المنتج

، q_1 تشير إلى كمية عرض الشركة الأولى

، q_2 تشير إلى كمية عرض الشركة الثانية

وبفرض أن C_1, C_2 تشير إلى التكلفة المتوسطة للمنتج في الشركة الأولى والثانية على الترتيب تكون دالة عائد الشركة الأولى [٦، ٧] كالتالي:

$$H_1(q_1,q_2)=q_1p(q_1,q_2)-C_1q_1 =q_1[a-b(q_1+q_2)]-C_1q_1 \tag{26}$$

وبالمثل تكون دالة عائد الشركة الثانية كالتالي:

$$H_2(q_1,q_2)=q_2[a-b(q_1+q_2)]-C_2q_2 \tag{27}$$

سنفرض أن الكميّات التي يمكن أن تعرضها الشركة الأولى هي $i=1,2,\ldots,m$ وأن الكميّات التي يمكن أن تعرفها الشركة الثانية هي $j=1,2,\ldots,n$ وأن الموقف ذو معلومات غير تامة أي يقابل الحالة الأولى، فيكون الشكل الطبيعي بدلالة عوائد الشركة الأولى $A=(a_{ij})$ حيث a_{ij} تشير إلى عائد الشركة الأولى إذا اختارت الاستراتيجية i (التي تقابل كمية معينة تنتمي إلى q_1) واختارت الشركة الثانية الاستراتيجية j (التي تقابل كمية معينة تنتمي إلى q_2)، ونحصل على a_{ij} لجميع قيم i,j بالتعويض في الدالة (26) بمعلومية a,b التي نحصل عليها من الدالة (25). وبالمثل يكون الشكل الطبيعي بدلالة عوائد الشركة الثانية $B=(b_{ji})$ حيث b_{ji} تشير إلى عائد الشركة الثانية إذا اختارت الاستراتيجية j واختارت الشركة الأولى الاستراتيجية i، ونحصل على b_{ji} لجميع قيم i,j بالتعويض في الدالة (27) بمعلومية a,b .

في الشكل الطبيعي A يلاحظ أن عناصر كل صف تتناقص تدريجيًا بمعدل $-bq_1$ وذلك لأن:

$$\frac{\partial H_1(q_1,q_2)}{\partial q_2} = -bq_1 \tag{28}$$

أي أن عناصر العمود الأيمن الذي يقابل أكبر كمية عرض ممكنة للشركة الثانية تكون أصغر من العناصر المقابلة لها في باقي أعمدة A . ومن ناحية أخرى نجد أن عناصر كل عمود تتزايد تدريجيا مع زيادة كمية عرض الشركة الأولى حتى تصل إلى قيمتها العظمى، ثم تبدأ في الانخفاض، وذلك لأن:

$$\frac{\partial H_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - C_1 \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 H_1(q_1,q_2)}{\partial q_1^2} = -2b \tag{30}$$

ويترتب على ذلك أن الاستراتيجية التي تقابل عرض أكبر كمية ممكنة للشركة الثانية أي التي تقابل العمود الأيمن تسود dominates جميع الاستراتيجيات الأخرى لهذه الشركة وأن :

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i a_{i\bar{j}} \tag{31}$$

حيث $\bar{j}$ تشير للعمود الأيمن في الشكل الطبيعي A .

ينتج من ذلك أن :

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i a_{ij} \geqslant \min_j \max_i a_{ij} \tag{32}$$

وحيث إنه من المعروف أن :

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqslant \min_j \max_i a_{ij} \;^{(٢)} \tag{33}$$

$$\therefore \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = V_1(1) \tag{34}$$

ومن (10) و (11) و (34) نستنتج أن :

$$V_1(1) = V_2(1) = V_3(1) \tag{35}$$

ويعني ذلك عدم وجود حافز لدى الشركة الأولى لتغيير نمط المعلومات من حالة إلى أخرى وعدم جدوى المعلومات الإضافية للشركة الأولى بخصوص تصرف الشركة الثانية .

وبالمثل يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بالنسبة للشركة الثانية ، ففي الشكل الطبيعي B يلاحظ أن عناصر كل صف تتناقص تدريجيا بمعدل $-bq_2$ وذلك لأن :

$$\frac{\partial H_2(q_1,q_2)}{\partial q_1} = -bq_2 \tag{36}$$

---

(٢) لبيان ذلك نفرض أن $\max_i \min_j a_{ij} = a_{rs}$ وأن $\min_j \max_i a_{ij} = a_{\alpha\beta}$ ويعني ذلك أن a_{rs} يمثل أصغر عنصر في الصف r أي أن $a_{rs} \leqslant a_{r\beta}$ ، وأيضاً فإن $a_{\alpha\beta}$ يمثل أكبر عنصر في العمود β أي أن $a_{\alpha\beta} \geqslant a_{r\beta}$ وينتج من ذلك أن $a_{rs} \leqslant a_{\alpha\beta}$.

أي أن عناصر العمود الأيمن الذي يقابل أكبر كمية عرض ممكنة للشركة الأولى تكون أصغر من العناصر المقابلة لها في باقي أعمدة الشكل الطبيعي B .

ومن ناحية أخرى نجد أن عناصر كل عمود تتزايد تدريجيا مع زيادة كمية عرض الشركة الثانية حتى تصل إلى قيمتها العظمى، ثم تبدأ في الانخفاض وذلك لأن :

$$\frac{\partial H_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = a-2bq_2-bq_1-C_2 \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 H_2(q_1,q_2)}{\partial q_2^2} = -2b < 0 \tag{38}$$

ويترتب على ذلك أن الاستراتيجية التي تقابل عرض أكبر كمية ممكنة للشركة الأولى أي التي تقابل العمود الأيمن تسود جميع الاستراتيجيات الأخرى لهذه الشركة وأن :

$$\max_j \min_i b_{ji} = \max_j b_{j\bar{i}} \tag{39}$$

حيث $\bar{i}$ تشير للعمود الأيمن في الشكل الطبيعي B .

وينتج من ذلك أن :

$$\max_j \min_i b_{ji} = \max_j b_{j\bar{i}} \geqslant \min_i \max_j b_{ji} \tag{40}$$

وحيث إنه من المعروف أن :

$$\max_j \min_i b_{ji} \leqslant \min_i \max_j b_{ji} \tag{41}$$

$$\therefore \max_j \min_i b_{ji} = \min_i \max_j b_{ji} = V_1(2) \tag{42}$$

ومن (22) و (23) و (42) نستنتج أن :

$$V_1(2) = V_2(2) = V_3(2) \tag{43}$$

ويعني ذلك عدم وجود حافز لدى الشركة الثانية لتغيير نمط المعلومات من حالة إلى أخرى، وعدم جدوى المعلومات الإضافية للشركة الثانية بخصوص تصرف الشركة الأولى .

مثال ٢ :

نفرض أن $a=26$ و$b=0.67$ في الدالة (25) ، وأن كميات العرض الممكنة للشركة الأولى هي : 10، 12، 14، 16 وأن كميات العرض الممكنة للشركة الثانية هي :

6, 8, 10, 12 ، وأن $C_1=2$,$C_2=2.25$ ، وبـالتعويض في الدالة (26) نحصل على الشكل الطبيعي بدلالة عوائد الشركة الأولى $A=(a_{ij})$ كالتالي :

استراتيجيات الشركة الثانية

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{استراتيجيات} \quad 1 \\ \text{الشركة} \quad 2 \\ \text{الأولى} \quad 3 \\ \quad 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 132.80 & 119.4 & 106.00 & 92.60 \\ 143.28 & 127.2 & 111.12 & 95.00 \\ 148.40 & 129.64 & 110.88 & 92.12 \\ 148.16 & 126.72 & 105.28 & 83.84 \end{bmatrix} \end{array}$$

ولبيان كيفية إيجاد الشكل الطبيعي A نجد أنه عندما تختار الشركة الأولى الاستراتيجية الثالثة أي عند $q_1=14$ وعندما تختار الشركة الثانية الاستراتيجية الرابعة أي عند $q_2=12$ فإن عائد الشركة الأولى المقابل أي a_{34} يكون كالتالي :

$$H_1(14,12)=14[26-0.67(14+12)]-2\times14=92.12$$

وبالمثل بالنسبة لباقي عناصر الشكل الطبيعي .

وأيضاً بالتعويض في الدالة (27) نحصل على الشكل الطبيعي بدلالة عوائد الشركة الثانية $B=(b_{ji})$ كالتالي :

استراتيجيات الشركة الأولى

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{استراتيجيات} \quad 1 \\ \text{الشركة} \quad 2 \\ \text{الثانية} \quad 3 \\ \quad 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 78.18 & 70.14 & 62.10 & 54.08 \\ 93.52 & 82.80 & 72.08 & 61.36 \\ 103.50 & 90.10 & 76.70 & 63.30 \\ 108.12 & 92.04 & 75.96 & 59.88 \end{bmatrix} \end{array}$$

ومن الشكل الطبيعي A نحصل على :

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = a_{24} = 95$$

$$V_1(1) = V_2(1) = V_3(1) = 95$$

ومن الشكل الطبيعي B نحصل على:

$$\min_i \max_j b_{ji} = \max_j \min_i b_{ji} = b_{34} = 63.30$$

$$V_1(2) = V_2(2) = V_3(2) = 63.3$$

نستنتج من ذلك أنه إذا كان لدينا شركتان تحتكران إنتاج وتسويق منتج معين، وكانت دالة عرض المنتج خطية فإن قيمة المباراة للشركة لا تتغير عندما تتخذ قرارها في حالة معرفة أو عدم معرفة قرار الشركة الأخرى، ويترتب على ذلك عدم وجود حافز لدى أي من الشركتين للحصول على معلومات عن الكمية التي تعرضها الشركة الأخرى.

References

[١] Trueman, R.E. *Quantitative Methods for Decision Making in Business*, New York, Holt, Rinehart, 1981.

[٢] Shubik, M. *Game Theory in the Social Sciences*. London: The MIT Press, 1982.

[٣] Luce, R. and Raiffa, H. *Games and Decisions*. New York: John Wiley & Sons, 1957.

[٤] Jones, A.J. *Game Theory, Mathematical Models of Conflict*. New York: John Wiley & Sons, 1980.

[٥] Von Neumann, and J. Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1953.

[٦] Friedman, J.W. *Oligopoly and the Theory of Games*. Amesterdam: North-Holland, 1977.

[٧] Intriligator, M.D. *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Englewood Cliffs: Printice-Hall, 1971.

The Value of Additional Information in a Competitive Model Between Two Firms

Ibrahim Ahmed Makhloof
Associate Professor, Department of Quantitative Methods, College of Administrative Sciences, King Saud University, Riyadh, Saudi Arabia

(Received 14/6/1411; Accepted for Publication 19/11/1411)

Abstract. In this paper, we suppose that there are two monopolistic firms supplying a certain product. This situation is formulated as a two person non-zero sum game with two personal moves. We show first how to estimate the value of additional information when each firm transfers from a certain system of information to another, then we present a particular application where the supply function of the product is linear. In this case, any of the two firms has no motive to obtain information about the quantity supplied by the other. A numerical example is used to illustrate the concepts introduced in the paper.