مجلة جامعة الملك سعود، م ٣، العلوم الإدارية (٢)، ص ص ٢٨١-٣٣٠ (١٤١١هـ / ١٩٩١م).

أسلوب بييز في تسوية معدّلات الوفاة

إبراهيم محمد مرجـان

أستاذ مساعد، معهد الإدارة العامة، الرياض

(قدم للنشر في ١٤١٠/٧/٢٩هـ وقبل للنشر في ١٤١١/٥/٢٢هـ)

ملخص البحث. تمت صياغة عملية تسوية جداول الحياة على أنها عملية تقدير إحصائي (statistical estimations) تتطلب تقدير أو تعديل قيمة مجموعة كبيرة من معدّلات الوفاة في آن واحد مع الأخذ في الاعتبار خصائص معدّلات الوفاة المعروفة التي قد لا تشملها معدّلات الوفاة على أنها معلومات مسبقة. لذا تم تقديم الطريقة الحديثة الخاصة بالتسوية البييزية وتم توضيح خطوات وإجراءات تطبيقها العملي على خبرة وفيات المستأمنين بشركات التأمين المصرية.

هذه الطريقة تعطي الفرصة للمُسَوِّى لكى يضمن تأثيرًا مناسبًا لمعلوماته المسبقة عن معدّلات الوفاة من جميع النواحي مثل الارتباط بين المعدّلات في الأعمار المختلفة أو مثل درجة الدقة الموروثة في البيانات بنوعيها.

وقد تم بناء النموذج الإحصائي كما يلي:

- **توزيع العيّنة**: تم أخذ النموذج التقليدي لإجراءات الوفاة ألا وهو نموذج ثنائي الحدين مع إضافة الغرض الخاص بالاستقلال المتبادل بين متغيّرات النموذج ومن ثم فباستخدام نظرية النهاية المركزية أمكن القـول بأن توزيع العيّنة سيؤول إلى شكل التوزيع الطبيعي المتعدد عندما تزداد قيمة المقادير المُعَرّضة للخطر.
- **التوزيع المسبق**: تم استخدام طريقة تحليل التوزيعات المتزاوجة للقول بأن التوزيع المسبق سيأخذ شكـل التـوزيع الـطبيعي المتعـدد، ثم باستخـدام تحويلات معكـوس جيب زاوية الجذر التربيعي للمعـدّلات الخـام أمكن تحديد مصفـوفـة التبـاين المشترك للتوزيع المسبق، ثم باستخدام تعريف

المتوسطات المسبقة أمكن أخذ المعدّلات المستخدمة حاليًا بسوق التأمين المصرية (الجدول النهائي الإنجليزي ٤٩-١٩٥١م) لمتجه متوسطات التوزيع المسبق.

- باستخدام نظرية بييز أمكن الوصول إلى التوزيع اللاحق لمعدّلات الوفاة وتم توضيح طريقة استخدامه لتحديد قيم المعدّلات المُسوّاة المناسبة لأغراض الاستعمال المختلفة.
- استخدمت محدّدات معكوسات مصفوفات التباين المشترك لتوزيع العيّنة والتوزيع المسبق والتوزيع اللاحق كمقاييس لدرجة دقة المعدّلات الخام والمعدّلات المسبقة والمعدّلات اللاحقة وتحديد درجة التحسن في الدقة نتيجة لتطبيق التسوية.

هذا وقد كانت نتائج البحث جيدة من الناحية النظرية والتجريبية خاصة تلك الخاصة بمصفوفة معاملات الارتباط وكذا نتائج الاختبارات الإحصائية.

مقدمة

تجد عادة عملية تسوية جداول الحياة مبرر وجودها في وجود الأخطاء العشوائية (random errors) في البيانات والمعدّلات المستمدة من العيّنات (samples)، حيث يقال دائمًا أن كل معدّل من المعدّلات المحسوبة من عيّنة ـ وسوف نطلق عليها المعدّلات المشاهدة وسوف نرمز لها بالرمز فـ̲ (ر) ـ عبارة عن حاصل جمع عنصرين أولهما القيمة الحقيقية لهذا المعدّل في المجتمع ـ وسنطلق عليها المعدّلات الحقيقية وسنرمز لها بالرمز ف (ر) ـ وهذا المعدّل الحقيقي غير معروف لنا ونريد الوصول إلى أفضل تقدير له عن طريق بيانات العيّنة، وثانيهما هو الخطأ العشوائي أو خطأ العيّنة الذي يتحتم وجوده في البيانات التي لم تعتمد على الحصر الشامل واكتفت بدراسة عيّنة. وبالرغم من وجود الطرق العلمية التي تضمن لنا تمثيل العيّنة للمجتمع تمثيلاً جيدًا إلا أن خطأ الصدفة في تحديد مفردات العيّنة لابد من وجوده وسنرمز له بالرمز ع (ر)، وعادة ما توجد المبررات العلمية لدى الإحصائيين لافتراض توزيع ع (ر) وفقًا للتوزيع الطبيعي (normal distribution) بمتوسط = صفر وتباين يمكن حسابه. لذا فعادة ما تكتب العلاقة الآتية:

فـ̲ (ر) = فـ(ر) + ع (ر)

ع (ر) موزع طبيعي (متوسط = صفر، تباين = ت)

وسنوضح أنه يمكن النظر إلى عملية تسوية جداول الحياة على أنها أحد التطبيقات المباشرة للنظرية الإحصائية الخاصة بالتقدير الإحصائي (statistical theory of estimation)

المبنية على الخبرة الشخصية السابقة عن طريق الاحتمال المفترض (prior probability) وهذا هو ما سمى حديثًا بالإحصاء البييزى (Bayesian statistics) نسبة إلى العالم الإحصائي بييز (Bayes) حيث يمدنا هذا الإحصاء البييزي بطريقة علمية لمزج المعلومات المسبقة القديمة (prior information) مع البيانات المجمّعة حديثًا بواسطة العيّنات. ولأننا عند تقديرنا لأى معلمة من معلمات النماذج الاكتوارية نعتمد دائمًا على مزيج من بيانات الخبرة الماضية وبيانات أخرى حديثة فإن تسوية البيانات تعتبر أحد الأمثلة التي تعتمد على بيانات مستمدة من مصادر مختلفة لتقدير المعلمات.

وبالرغم من اعتبار عملية تسوية جداول الحياة عملية تقدير إحصائي إلا أنها تختلف عن عمليات التقدير الإحصائي المعروفة (كعملية تقدير الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري أو أحد معاملات الارتباط في المجتمع) فيما يلي:

١) عملية تسوية جداول الحياة تتطلب تقدير مجموعة كبيرة من القيم في آن واحد، مثل تقدير معدّلات الوفاة الحقيقية عند مجموعة كبيرة من الأعمار المختلفة. لهذا فإن عملية التسوية تحتاج إلى أدوات علمية وتقنيات أكثر قدرة وأكثر تعقيدًا لإتمامها. فمثلاً سوف نحتاج إلى التعامل مع المتجهات والمصفوفات والتوزيعات الطبيعية المتعددة.

٢) عملية تسوية جداول الحياة تعتمد على معلومات قد لا تشملها بيانات العيّنة المُجمّعة أو المعدّلات المشاهدة. وقد أشار إلى ذلك الفنستون (Elphinstone) [١] في مناقشته لمنطقية عملية التسوية وحاجة الاكتورايين إليها.

ولذا فلكى يمكن قبول نتيجة التسوية لابد وأن تكون هذه النتيجة منسجمة ومتفقة ليس فقط مع البيانات المشاهدة من ناحية ومع مبدأ التنعيم المعروف من ناحية أخرى بل أيضًا منسجمة ومتفقة مع جميع المعلومات المرتبطة والمكتسبة حتى قبل مشاهدة البيانات الجديدة. هذه الحتمية الخاصة بالمعلومات المرتبطة في نتائج عملية التسوية والموجودة حتى قبل مشاهدة أى بيانات أو معدّلات خام تسمى بالرأى المسبق (prior opinion) أو

المعلومات المسبقة (prior information) لذا فإن طريقة التسوية الجيدة هي التي تعظم من استخدام المعلومات المسبقة أو الرأى المسبق إلى أقصى حد ممكن كما تعظم من استخدام البيانات المشاهدة.

في هذا البحث لا ندعي أننا سنقدم طريقة التسوية المثلى في جميع الأحوال، لكن سنوضح أحد الأساليب المتاحة لنا في عملية التسوية والتي تتميز بأنها تسمح للقائم بها (the graduator) باستخدام رأيه الشخصي أو معلوماته المسبقة بطريقة أكثر موضوعية عما هو مستخدم في جميع الطرق الأخرى. أيضًا سنوضح كيفية تطبيق الطريقة في تسوية معدّلات وفاة خام محلية.

أهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى تحقيق ما يلي:

١) تقديم طريقة حديثة من طرق تسوية جداول الحياة للقارىء العربي بصورة مبسطة وهي طريقة التسوية البييزية، نظرًا لأنها غير معروفة لعدد كبير من القرّاء العرب بالإضافة إلى أنها لم تكتب بالعربية من قبل بالرغم من العمل بها في الدول المتقدمة منذ زمن بعيد، فقد استخدمها مثلاً كيميلدورف وجونز (Kimedlofr & Jones) في الستينات [٢].

٢) توضيح كيفية تطبيق طريقة التسوية البييزية وذلك بتخصيص الجزء الأهم من هذا البحث لمثال تطبيقي يبيّن استخدام الإحصاء البييزي في تسوية معدّلات وفاة خام مصرية حقيقية.

أجزاء البحث

الجزء الأول (تسوية جداول الحياة)، سيتم فيه توضيح طبيعة عملية تسوية جداول الحياة ومدى الحاجة اليها. والجزء الثاني (التسوية البييزية)، سيتم فيه تطبيق الأسلوب البييزي في مجال تسوية جداول الحياة أو ما يمكن أن نطلق عليه اسم التسوية البييزية

(Bayesian graduation) مع سرد بعض مشاكل التطبيق واقتراح الطرق المناسبة لحل هذه المشـاكـل. والجزء الثالث (التوزيع المسبق للمعلمات)، سيتم فيه التعرض لإحدى هذه المشاكل التطبيقية وهي الخاصة بكيفية وضع نموذج إحصائي لتلخيص معلوماتنا المسبقة عن معدّلات الوفاة وكيفية مواجهتها. والجزء الرابع (مقاييس درجة الدقة)، سيتم فيه اقتراح بعض مقـاييس الدقة التي يمكن باستخدامها الحكم على دقة مصادر المعلومات وكذلك مقـدار التحسن في درجـة الـدقـة الناتج من عملية التسوية. والجزء الخامس (البيانات المسـواة): سيتم فيه توضيح كيفية استخراج المعدّلات المسواة. والجزء السادس (تطبيق طريقة التسوية البييزية على بيانات فعلية من الخبرة المصرية): سيتم فيه توضيح إجراءات وخطوات تطبيق طريقة التسوية البييزية على معدّلات وفاة خام مستمدة من سوق التأمين المصرية للوصول إلى المعدّلات المسواة. ثم نختتم البحث بسرد النتائج والتوصيات.

تسوية جداول الحياة

يتطلب تقدير قسط تأمين الحياة الفردي في النموذج التقليدي تقدير مجموعة المعلمات الخاصة بمعدّلات الوفاة ومعدّلات الفائدة ومعدّلات تحميلات المصروفات. ويتفق الخبراء على أن الخبرة المُجَمّعة حديثًا لا تكفى وحدها لتقدير هذه المعلمات بل يجب أن تعدّل وفقًا للمعلومـات المسبقـة والخـبرة المـاضية. وينظر الإحصائيون البييزيون إلى المعلمات (هى الأخرى) على أنها غير مؤكدة ويقومون بترجمة عدم التأكد حول المعلمات إلى توزيع احتمالي مسبق. ثم باستخـدام أدوات نظرية بييز يمكن الـوصول إلى توزيع احتمالي لاحق لهذه المعلمات عن طريق مزج التوزيع المسبق مع التوزيع الاحتمالي الخاص بنتائج وخبرة العيّنة المشاهدة حديثًا. ويمكن بعد ذلك استعمال التوزيع الاحتمالي اللاحق في تحديد مدى معيّن تقـع فيه قيم معلمات أقساط التأمين المطلوب تحديدها بدرجات ثقة أو احتمالات مناسبة ومحدّدة سلفًا.

عملية المزج بين المعلومات والخبرة الماضية مع المشاهدات والبيانات الحديثة ليست بجـديدة على الاكتـواري فقد سبق واستخدم هذا الأسلوب في أماكن عديدة في العلوم الاكتـوارية فمثلاً عند تقدير معلمات معدّلات الوفاة عادة ما تظهر معدّلات الوفاة الخام المشاهدة عدم انتظام نرجعه دائمًا إلى الخطأ العشوائي في العيّنات. هذه المعدّلات الخام

تفتقر إلى الخواص المعروفة في معدّلات الوفاة ولا يمكن لإدارات مشاريع التأمين التي تتميز بالتحفظ أن تقدم على استعمالها في التخطيط للمستقبل. لذا فلكى نقلل من عدم الانتظام ونضمن معدّلات معقولة ومقبولة لقطاع التأمين فإننا نقوم بإنشاء جداول الحياة وتسويقها. وتعريف عدم الانتظام نفسه كتطبيق لمبدأ أخذ المعلومات المسبقة عن معدّلات الوفاة في الاعتبار حيث توجب هذه المعلومات نعومة المعدّلات الخاصة بالأعمار المتتالية، لذا وجب فحص المعدّلات المتتالية وتحديد عدم الانتظام والقيام بالتسوية. والمعلومات المسبقة عن التسوية يمكن استخدامها في تحديد أو اختيار طريقة التسوية نفسها والنموذج المستعمل فيها. فمثلاً يمكن استعمال المعلومات المسبقة عن مستوى احتمالات الوفاة لاختيار أو تفضيل طريقة التسوية باستخدام جداول نموذجية (stadnard tables) وأيضًا تحديد هذه الجداول. وقد استخدم كيميلدورف وجونز (Kimedlorf & Jones) [٢] المعلومات المسبقة عن مستوى معدّلات الوفاة في التسوية البييزية مباشرة. لذا يمكن القول بأن الإحصائيين والاكتواريين مجمعون على أهمية استعمال البيانات والمعلومات المسبقة عند تطبيق إجراءات التسوية ولا يوجد أى خلاف أو أى اعتراض على ذلك وإنما يدور الفرق بينهم حول مدى استخدام المعلومات المسبقة وشكل تلخيصها.

التسوية البييزية

تتبع جونز (Jones) [٣] تاريخ معادلة الفروق واستعمالها كطريقة من طرق تسوية جداول الحياة. وقد بيّن ويتكر (Whittaker) [٤] أنه عندما استحدث هذه الطريقة من طرق التسوية كان الهدف هو الوصول إلى مجموعة من المعدّلات المُسوّاة التي يمكن وصفها بأنها الأكثر احتمالاً. وقد سبق ويتكر في هذه الرغبة الخاصة بالوصول إلى معدّلات مُسوّاة يمكن وصفها بأنها الأكثر احتمالاً (كنج King) [٥]. وقد استعمل ويتكر في تطويره لطريقة التسوية المذكورة أسلوبين يمكن اعتبارهما من أساليب الإحصاء البييزى وهما:

١) رغبة ويتكر في اعتبار المقادير المراد تقديرها كمتغيّرات عشوائية بدلاً من اعتبارها معلمات محدّدة القيمة.

٢) استعماله الصريح لنظرية بييز لدمج المعلومات المسبقة عن التسوية مع النتائج المستمدة من المشاهدات الحديثة.

وقد قدم لنا كيميلدورف وجونز [٢] تطويرًا شاملاً لنظرية حديثة للتسوية البييزية وقد ضمّنوها أمثلة رقمية وأفكارًا جديدة عن إحصاء المتغيّرات المتعددة التي يمكن استخدامها في هذا المجال. وفيما يلي نضع صياغة مناسبة لمشكلة تسوية معدّلات الوفاة في القالب البييزي متّبعين في ذلك طريقة كيميلدورف وجونز وسوف نحدد في البداية بعض الرموز التي سنحتاج إلى استعمالها في هذا البحث والتي سوف نشير إليها ثانية في بعض أماكن استعمالها:

لنرمز إلى منقول المصفوفة (transpose) ا بـ «من (ا)»، وإلى محدّد المصفوفة (determenant) ا بـ «مج (ا)»، وإلى معكوس المصفوفة (inverse) ا بـ «مع (ا)»، وإلى الجذر التربيعي لـ حـ بـ «جذ (حـ)»، وإلى مربع حـ بـ «مر (حـ)»، ولنرمز إلى المعدّلات الخام المشاهدة بالرمز فَـ (ر)، ر=١، ٢، ٣. . . . . ، ن (معدل لكل عمر أو فئة عمرية). ولنفرض أننا أردنا حساب المعدّلات المسوّاة التي سوف نرمز لها بالرمز فَ (ر). نستعمل الآن المتجهات ورموزها للدلالة على سلسلة المعدّلات المشاهدة وسلسلة المعدّلات المسوّاة في منقولات (transpose) المتجهات الآتية:

فَـ = من [فَـ (١) ، فَـ (٢)، . . . . . ، فَـ (ن)]

فَ = من [فَ (١) ، فَ (٢)، . . . . . ، فَ (ن)]

ولتنفيذ إجراءات التسوية للوصول إلى قيمة المتجه فَ من المتجه فَـ يجب أن نعرف بعض المتجهات العشوائية والمتغيّرات العشوائية.

لنفرض أن المتغير فـ (ر) يرمز إلى قيمة المعدّل الخام رقم (ر) من المعدّلات التي يبلغ عددها ن معدّل. ولنرمز بالرمز فـ للمتجه الرأسي الذي تتكون مفرداته من المتغيّرات العشوائية فـ (ر)، ر=، ١، ٢، ٣، . . . . . ، ن. أى أن

فـ = من [فـ (١)، فـ (٢)، . . . . ، فـ (ن)]

هي متجه عشوائي يتكون من المتغيّرات العشوائية الخاصة بمعدّلات الوفاة المشاهدة، ف هي قيمة محدّدة مشاهدة لهذا المتجه. ولنرمز للمعدّل الحقيقي المجهول بالرمز ف (ر)، ر=١، ٢، ٣، . . . . ، ن. في الإحصاء التقليدي لا تعتبر ف (ر) متغيراً عشوائيًّا بل معلمة محددة القيمة وإن كانت مجهولة بينما في الإحصاء البييزى تعتبر ف (ر) متغيّراً عشوائيًّا. لذلك

فإننا نعرف ف بأنها متجه عشوائي مفرداته هي المتغيّرات العشوائية الخاصة بالمعدّلات الحقيقية. أي أن

ف = من [ف (١)، ف (٢)، . . . . ، ف (ن)]

عندئذ يمكن صياغة عملية التسوية في قالب عملية تقدير إحصائي لقيمة المتجه العشوائي ف بعد وضع الشرط الخاص بأن يأخذ المتجه العشوائي ف القيمة المحددة فَ - أى تقدير (ف/ ف=فَ). وسوف تعرف فَ (إحدى قيم المتجه العشوائي ف= متجه المعدّلات بعد التسوية) بأنها هي قيمة هذا التقدير الإحصائي لـ (ف/ ف=فَ) وبذلك فإنه بعد صياغة المشكلة الخاصة بتسوية معدّلات الوفاة المشاهدة على صورة مشكلة تقدير إحصائي فإنه يمكن تقسيم إجراءات التحليل البييزى المطلوب إلى أربع مراحل يمر بها المُسوّى كما ذكر جونز [٣] وهي :

المرحلة الأولى :

يقوم فيها المُسوّى باختيار نموذج إحصائي للتوزيع الاحتمالي المسبق للمتجه العشوائي ف يُلَخّص فيه جميع معلوماته المسبقة عن فَ فيما عدا تلك المعلومات الموجودة في متجه المشاهدات الحديثة فَ. وقد حدد كيميلدورف وجونز [٢] التوزيع المسبق للمتجه ف لكى يكون أحد أفراد عائلة المتغيّرات الطبيعية المتعددة حيث برّر ذلك بسببين هما :

١ - إن التوزيع الطبيعي المتعدد المسبق عندما يتم دمجه مع التوزيع الطبيعي المتعدد للمشاهدات الفعلية الحديثة باستخدام نظرية بييز ينتج توزيع لاحق هو أحد أفراد العائلة الطبيعية المتعددة نفسها تطبيقًا لقاعدة التوزيعات الاحتمالية المتزاوجة (conjugate probability distributions) الشائع استخدامها في التحليل البييزي.

٢ - إن التوزيع الطبيعي المتعدد من السهولة تحديده لأن معلماته لها تفسير سهل ومعروف (متوسط حسابي، وتباين). وسوف نرمز لمتجه ومصفوفة المعلمات التي تحدّد التوزيع الطبيعي المتعدد بالرموز «مـ» لمتجه المتوسطات، «ا» لمصفوفة التباين المشترك صـ(variance-covariance matrix). وبذا يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال للمتجه العشوائي ف على الوجه الآتي :

ح (ف) = حـ١ × هـ - ٠,٥ [من (ف - مـ)] [مع (ا)] (ف - مـ) (١)

حيث حـ١ = ثابت = جذ [{(٢ ط) ا س (ن)} × مح (ا)] ومح = محدد ومع = معكوس.

المرحلة الثانية

يقوم فيها المُسوّى باختيار توزيع احتمالي مناسب يوافق البيانات والمشاهدات الحديثة - توزيع العيّنة data distribution - ونظرًا لأننا في مجال دراسة وتسوية معدّلات الوفاة فقد أخذ كيميلدورف وجونز [٢] الغرض التقليدي الخاص بافتراضه توزيعات ثنائية الحدين مستقلة (independent binomial distributions) لإجراءات معدّلات الوفاة عند كل عمر أو فئة عمرية ثم باستخدام نظرية النهاية المركزية (central limit theorem) توصل إلى أن التوزيع النهائي (limiting distribution) لمعدّلات الوفاة عندما يزيد عدد الأحياء تحت الملاحظة بدون حد سيكون توزيعًا طبيعيًّا متعددًا. بمعنى أنه إذا كانت ف تأخذ قيمة معيّنة نرمز لها بالرمز فَ (ف=فَ) معلومة لدينا فإنه من المفترض أن فـ ستكون موزعة توزيعًا طبيعيًّا متعددًا بمعلمات هي فَ = متجه المتوسطات، مصفوفة تباين مشترك نرمز لها بالرمز ب. ولأننا افترضنا منذ البداية الاستقلال المتبادل (mutual independence) بين عناصر المتجه فـ فإن المصفوفة ب ستكون مصفوفة قطرية. من الواضح طبعًا أنه إذا قامت الدراسة على مجموعة مقفلة من الأحياء أو بمعنى آخر إذا درسنا الأحياء في مجموعة محدّدة من سنة إلى أخرى فإن فرض استقلالية عناصر المتجه فـ عن بعضها البعض سيكون افتراضا خاطئًا. في هذه الحالة فإن المصفوفة ب الخاصة بالتباين المشترك لن تكون قطرية. ولكن كما سيتضح فيما بعد فإن ذلك ليس حيويًّا في الأجزاء القادمة ولو أن اعتبار ب مصفوفة قطرية سيسهل من العمليات الحسابية فقط عند حساب معكوس المصفوفة ب. ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال المشروطة للمتجه العشوائي فـ بمعلومية أن المتجه العشوائي ف=فَ كما يلي:

ح (فـ/ف=فَ) = حـ٢ × هـ - ٠,٥ [من (فـ - فَ)] [مع (ب)] (فـ - فَ) (٢)

حيث حـ٢ = ثابت = جذ [{ (٢ ط) ا س (ن) } × مح (ب)]

المرحلــة الثالثة

ويطبق فيهـا القائم على التسوية نظرية بييز لدمج توزيعات المرحلتين الأولى والثانية للوصول إلى التوزيع اللاحق المنشود لـ ف بمعلومية أن فـ = فَ.

فعند تطبيق نظرية بييز للمتغيّرات المتصلة فإن

ح (ف/ فـ=فَ) = حـ٣ (فَ) × ح (ف) × ح (فـ/ ف = فَ) **(٣)**

حيث حـ٣ (فَ) هي دالة لـ فـ ولا تتأثر بـ ف. وبذا يمكن كتابة **(٣)** على الصورة التالية بعد التعويض عن دوال كثافة الاحتمالات :

ح (ف/ فـ=فَ) = حـ٤ × هـ^(-٠,٥ من (ف - مـ) مع (ا) (ف - مـ) + من (فـ - فَ) مع (ب) (فـ - فَ)) **(٤)**

حيث حـ٤ = حـ١ × حـ٢ × حـ٣ = ثابت لا يعتمد على ف ولكن يعتمد على قيمة متجه المشاهدات فَ. وباستخدام خواص المصفوفات يمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال الشرطية السابقة (٤) على الصورة الآتية :

ح (ف/ فـ=فَ) = حـ٦ × هـ^(-٠,٥ [من (ف - م)] [مع (ج)] (ف - م)) **(٥)**

حيث ج = مع [مع (ا) + مع (ب)]

، م = ج × [مع (ب) × فَ + مع (ا) × مـ]

، حـ٦ = حـ٤ × هـ^(-٠,٥ [من (فَ) مع (ب) فَ + من (مـ) مع (ا) مـ + من (م) مع (ج) م]) = ثابت لا يعتمد في قيمته على ف وإنما يعتمد على متجه المشاهدات الحديثة فَ. وبالتالي فإنه من الواضح تحت الفروض الموضوعة سلفًا فإن التوزيع اللاحق لمتجه المعدّلات الحقيقية ف بمعلومية أن المتجـه العشـوائي للمعدّلات المشاهدة فـ قد أخذ القيمة فَ هو أيضًا أحد أفراد عائلة التوزيع الطبيعي المتعدد بمعلمات، م = متجه المتوسطات، ج = مصفوفة التباين المشترك.

المرحلـة الرابعــة

بعد أن يضع المُسَوّى يده على التوزيع اللاحق لـ (ف/فـ =فَ) فإنه يمكنه استعمال التحليل البييزي لهذا التوزيع اللاحق تبعًا لأغراض واستعمالات النتائج. فمثلاً إذا أراد اتباع كنج (King) [٥] في اعتباره المعدّلات المسوّاة هي الأكثر شيوعًا فإنه يمكنه حساب

منـوال التوزيع اللاحق لـ (ف/فَ) واعتباره هو التقدير الإحصائي المناسب للمعدلات المسوّاة المطلوبة. أيضًا وكما هو معتاد في النظرية الإحصائية يمكن أن نجد المبررات المناسبة لأخـذ وسط أو وسيط التـوزيع الـلاحق لـ (ف/فَ) واعتباره مساويًا للمعدّلات المسوّاة المطلوبة. على أي من الأحوال فإنه من الطبيعي ألا يظهر هذا الخلاف في هذا البحث لأنه تحت الفروض الموضوعة قد اتضح أن التوزيع اللاحق المشروط لـ (ف/فَ) هو من النوع الطبيعي المتعدد المعروف بتساوي كل من وسطه ووسيطه ومنواله. وبذا فمن الطبيعي أن نأخـذ هذه القيمـة ونعتبرها مساوية للمعدّلات المسوّاة المطلوبة. أى أن متجه المعدّلات المسوّاة =

فَ = م = مع [مع (ا) + مع (ب)] × [مع (ا) مـ + مع (ب) فَ] (٦)

يمكن استعمال نظرية التقدير الإحصائي لوضع التفسير المنطقي للعلاقة (٦) كما يلي:

من المعـروف أنـه إذا أردنـا حسـاب متـوسط حسـابي مرجح للكميتين س، ص باستخـدام الأوزان ا، ب على الترتيب فإن هذا المتوسط المرجح = (ا س + ب ص) ÷ (ا + ب). والآن إذا نظرنا إلى العلاقة (٦) بطريقة مشابهة فإنه يمكن القول بأن المتجه م للمعـدّلات المسوّاة هو عبارة عن متوسط مرجح للمتجهين مـ، فَ (المعدّلات المسبقة، والمعدّلات المشاهدة) بأوزان تساوي معكوس المصفوفة الخاصة بالتباين المشترك لكل متجه (أىْ معكوس ا «مع (ا)»، ومعكوس ب «مع (ب)»).

كما أنه يمكن كتابة العلاقة (٦) على صورتين أخريين هما:

فَ = م = فَ + مع [١ + ا مع (ب)] × (مـ - فَ) (٧)

فَ = م = مـ + مع [١ + ب مع (ا)] × (فَ - مـ) (٨)

حيث «ا» يرمز الى مصفوفة الوحدة من الحجم ن × ن.

العلاقة (٧) تسهل النواحي الحسابية في معكوس المصفوفات أكثر من (٦) و (٨) لأن ب مصفوفة قطرية ومن السهل حساب معكوسها، لذا لا يوجد في (٦) سوى معكوس

واحد فقط يحتاج للحساب هو «مع (١ + ا ب)». في حين في (٦) و (٨) معكوسان دائمًا يحتاجان للحساب المطوّل هما: مع (ا) بالإضافة إلى مع [مع (ا) + مع (ب)] أو مع [١+ب مع (ا)].

العلاقة (٨) تؤكد وجهة النظر البييزية التي تعرف التسوية بأنها طريقة علمية لتعديل الرأى المسبق للمسوّى في ضوء ما تجمع لديه من بيانات حديثة. فقبل أن نشاهد نتائج العيّنة الحديثة قدر المسوّى المعدّلات الحقيقية بالمعلمة «مـ» التي هي متوسط التوزيع المسبق بينما يقوم بتعديل تقديره لقيمة المعدّلات الحقيقية بعد مشاهدة نتائج العيّنة الحديثة بما قيمته مع [١+ب مع (ا)] × (فَ ـ مـ).

يمكن اعتبار العلاقة (٦) قانونًا لتحديد قيمة المعدّلات المسوّاة فَ بدلالة المعدّلات غير المسوّاة فَ. أى أنه يمكن اعتبارها طريقة من طرق التسوية. في حقيقة الأمر فإن هذه الطريقة من طرق التسوية هي التي تسمى حاليًا بطريقة التسوية البييزية.

عند تطبيق هذه الطريقة يعتبر العائق الأكبر هو صعوبة تحديد التوزيع المسبق. كيميلدورف وجونز تغلبًا على هذه المشكلة باختيار التوزيعات الطبيعية المتعددة للتوزيع المسبق والتوزيع المتزاوج الخاص بتوزيع العيّنة. ثم خصصا الجزء الثاني من مقالتهم [٢] لتحديد فصول من المصفوفات (classes of matrices) التي يمكن اختيار مصفوفة التباين المشترك المناسبة منها. وكان من نتائج تحديد الفصول المناسبة لمصفوفات التباين المشترك إما إجبار المسوّى على تحديد عدد كبير من المعلمات التي قد يكون بينها عدد لا يعلم عنه المسوّى كثيرًا من المعلومات أو تقييد مقدرته في تقديم معلومات مهمة من المعلومات المسبقة لديه. فيجب على المسوّى قبل استخدام هذه الطريقة أن يقدّر عناصر متجه المتوسطات «مـ» والتي يبلغ عددها ن عنصر ـ مـ (ر)، ر= ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن ـ ثم يقدّر عناصر مصفوفة التباين المشترك للعيّنة «ب» والتي يبلغ عدد عناصرها ن عنصرًا ـ ب (رر)، ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن ـ ثم يقدّر عناصر مصفوفة التباين المشترك المسبقة «ا» والتي يبلغ عدد عناصرها (ن×ن) عنصر ـ ا (ر ل)، ر، ل = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . ، ن ـ ولأنها مصفوفة متماثلة فإنه يكفي تقدير

[ن (ن + ١) ÷ ٢] عنصر، هي عناصر القطر الرئيس وعددها ن عنصرًا ـ ا (ر ر)، ر = ١، ٢، ٣، . . . . . ، ن ـ وعناصر النصف الأعلى (أو الأدنى) من المصفوفة وعددها [ن (ن ـ١) ÷ ٢] عنصرًا ـ ا (رل)، ل > ر = ١، ٢، و٣، . . . . . ، (ن ـ ١) أو (ل < ر = ٢، ٣، . . . . . ، ن ـ١) وتقدير هذا العدد الكبير من المعلمات والذي يبلغ مقداره [ن (ن + ٥) ÷ ٢] يشكل مشكلة كبيرة في التطبيق العملي لطريقة التسوية البييزية لذا وجب البحث وتقديم أسلوب آخر لتطبيق تسوية بييز وتسهيل تحديد المعلمات بمصفوفة التباين المشترك المسبقة «ا» وتفسير معنى هذه المعلمات.

تمدنا نظرية بييز بطريقة علمية متناسقة لدمج المعلومات المسبقة عن المتغيّرات تحت الاهتمام مع قيمة المشاهدات الحديثة لها. ولأغراض متعددة فإنه من المفيد أن يكون لدينا مقياس لدرجة الدقة (precision measure) للمعلومات التي نحصل عليها من هذين المصدرين، لذلك سوف يخصص جزء من هذا البحث للبحث عن مقياس يساعد المسوّى في قياس مقدار الدقة الناتجة من خلط المعلومات المسبقة مع المشاهدات الحديثة.

وفقًا لتوصية كل من ويتكر (Whittaker) [٤] وكنج (King) [٥] فإن كيميلدورف وجونز قد اعتبرا أن القيم الأكثر احتمالاً مساوية للقيم المسوّاة، ولذا فقد اقترحا استعمال متجه المتوسط اللاحق (الذي هو في الوقت نفسه متجه المنوال اللاحق) للتوزيع الطبيعي المتعدد اللاحق كتقدير للقيم المسوّاة. وبعدئذ تم إهمال جميع الخصائص الأخرى للتوزيع اللاحق لذا وجب البحث هنا للوصول إلى متجه من القيم المسوّاة والتي لها احتمالات محدّدة. ثم توضيح كيفية استخدام التوزيع اللاحق لـ (ف/فَ) لوضع عبارات احتمالية مفيدة في مجالات كثيرة مثل التخطيط والرقابة. ومن الواضح أنه إذا تم استخدام التوزيع الطبيعي المتعدد اللاحق في وضع مثل هذه العبارات الاحتمالية فإن درجة التقريب التي استخدمت عند افتراض التوزيع الطبيعي المتعدد كنموذج إحصائي للتوزيع المسبق ولتوزيع العيّنة ستصبح أكثر أهمية عندئذ، لذا وجب البحث عن طريقة تؤدي إلى تحسين درجة الدقة في العبارات الاحتمالية المشتقة من التوزيع اللاحق.

أيضًا هناك مشكلة قد تبدو بسيطة ولكنها معقدة (وقد واجهها أيضًا كيميلدورف وجونز) وهي الخاصة بطريقة بناء النموذج الإحصائي الخاص بتوزيع العيّنة (sampling distribution)

فإذا أخذنا نموذج ثنائي الحدين لإجراءات معدّلات الوفاة فإن المعدّلات المشاهدة

ف (ر) = و (ر) ÷ ض (ر) ، ر = ١، ٢، ٣، . . . . ، ن

حيث و (ر) = عددًا عشوائيًا يمثل عدد الوفيات بين العمر ر ، ر + ١

ض (ر) = المقدار المعرض للخطر بين العمر ر ، ر + ١

فإذا كانت القيمة المتوقعة لمعدّل الوفاة ف (ر) هى ف (ر) ـ أى أن قم [ف (ر)] = ف (ر)، «قم» ترمز إلى القيمة المتوقعة ـ وكانت ض (ر) = رقمًا كبيرًا، فإنه من المعروف (تطبيقًا لنظرية النهاية المركزية [central limit theorem]) أن

[ف (ر) ـ ف (ر)] ÷ جـذ [ف (ر) × { ١ ـ ف (ر)} ÷ ض (ر)]

ستأخذ تقريبًا شكل التوزيع الطبيعي المعياري. لذا فإن هذه النتيجة هي سبب الاقتراح السابق الخاص باستخدام التوزيع الطبيعي المتعدد للمتجه العشوائي (ف/فَ). وبما أن هدف هذا التحليل سيكون الوصول إلى التوزيع اللاحق لـ (ف/فَ) فإن أحدى العقبات التي ستواجهنا ظهور عناصر فَ ليس فقط في متجه المتوسطات لـ فَ بل أيضًا في تباين كل عنصر من عناصر الـ فَ. هذه الظاهرة الأخيرة غير مناسبة للتحليل البييزي. كيميلدورف وجونز اقترحًا وضع [مـ (ر) { ١ ـ مـ (ر)} ÷ ض (ر)] بدلاً من [ف (ر) { ١ـ ف (ر)} ÷ ض (ر)] في قطر مصفوفة التباين المشترك لتوزيع العيّنة «ب» الخاصة بتوزيع (ف/فَ). وبتذكر أن مـ (ر) هي القيمة المتوقعة لـ ف (ر) بمقتضى التوزيع المسبق لـ ف (ر) فإن الاقتراح يبدو معقولاً ولو أننا سنحاول أن نقدم في هذا البحث حلاً آخر لهذه المشكلة.

النظرية الآتية [٦] ستساعد في الوصول إلى أهداف البحث:

نظـريــة

إذا كانت ف (ر) هي سلسلة من المقادير بحيث إن جـذ (ن) × [ف (ر) ـ ف] لها في النهاية (أى عندما تزيد ن إلى مالا نهاية) توزيع طبيعي بمتوسط = صفر وتباين نرمز له بالرمز «ت»، فإنه لأى دالة متصلة قابلة للتفاضل «د (٠)» عندما تؤول ن إلى مالا نهاية سيكون التوزيع النهائي للمقدار جـذ (ن) × [د { ف (ر)} ـ د (ف)] طبيعي بمتوسط = صفر وتباين = ت × مربع المعامل التفاضلي الأول للدالة د (ف) = ت × مربع [ء د (ف)].

في هذا البحث فَـ (ر) = و (ر) ÷ ض (ر)، ر = ١، ٢، ٣، . . . . . . ، ن. وعندما تؤول قيمة ض (ر) إلى مالا نهاية فإن المقدار جـذ [ض (ر)] × [فَـ (ر) ـ ف (ر)] يكون له توزيع طبيعي بمتـوسط = صفر وتباين = ف (ر) × [١ـ ف (ر)]. وبذا فإذا عرّفنا الدالّة المتصلة القـابلة للتفـاضـل د (•) = [مـع (حـا)] (جـذ (•))] = معكـوس جيب الزاوية (arc sine function) للجذر التربيعي لقيمة المتغيّر، فإنه بتطبيق النظرية السابقة يمكن القول بأنه عندما تؤول قيمة ض (ر) لكل قيمة من قيم ر=١ ، ٢ ، ٣، . . . . . ، ن إلى مالا نهاية فإن المقدار جـذ [ض (ر)] × [د {فَـ (ر)} ـ د { ف (ر)}] سيكون له توزيع نهائي من عائلة التوزيعات الطبيعية بمتوسط = صفر وتباين يمكن إثبات أنه= ٢٥, • أى أن له تباينًا ثابتًا لجميع قيم ر. خاصية ثبات التباين لدالة التحويل معكوس جيب الزاوية مهمة جدًا لنتائج البحث.

بتـطبيق التحـويل معكـوس جيب الزاوية للجذر التربيعي لعناصر متجه المعدّلات المشاهدة فَـ ينتج لدينا متجه من المتغيّرات العشوائية د (فَـ). هذا المتجه الأخير سيكون له تقريبًا توزيع طبيعي متعدد بمتجه متوسطات = [د { ف (ر)}] = [مع (جـا)] [جـذ { ف (ر)}] ومصفوفة تباين مشترك قطرية د (ب) عناصر قطرها الرئيس = ١÷ [٤×ض (ر)]. هذا وقد أثبت أنسكومب (Ancsmobe) [٧] أن استخدام الدالة الخاصة بمعكوس جيب زاوية الجذر التربيعي في تحويل البيانات سيؤدي ليس فقط إلى ثبات عناصر متجه المشاهدات فَـ بل إن هذه التحـويلات لها خاصية أخـرى هي تحسين درجة الدقة في تقريب التوزيعات الحقيقية إلى التوزيع الطبيعي. وبذا وبصفة عامة يمكن أن نتوقع أن التقريب إلى التوزيع الطبيعي بالوحدات المحولة سيكون أكثر دقة عنه بالوحدات الأصلية قبل التحويل. لكن لا يجب أن نعطي هذه النقطة أكثر من حجمها حيث إن حجم العيّنات المستخدم في الدراسات الاكتوارية وبناء جداول الحياة عادة ما يكون كبيرًا للدرجة التي يمكن معها استخدام نظرية العيّنـات الكبـيرة لنجد مبررًا قويًّا لافتراض التوزيع الطبيعي المتعدد كنموذج لتمثيل تلك البيانات. وهنا يجب أن نحذر من أنه إذا كان عدد الوفيات في الدراسة صغيراً فإن استعمال دالـة معكـوس جيب الـزاوية في تحويل البيانات سيؤدي إلى تشويه في مدى (range) قيم الاحتمالات، ولذا نرى قصر استعمال معكوس جيب الزاوية في تحويل البيانات في الفئات التي لا يقل عدد الوفيات بها عن خمس وفيات.

استخدم نوفيك ولويز وجاكسون (Novick, Lewis & Jackson) في مقالتهم [٨] تحويلات معكوس جيب الزاوية في اختبار نتائج إجراءات توزيع ثنائي الحدين في التحليل البييزى لكن لغرض تقدير النسب في المجموعات (estimation of proportions in groups) ولم يتطرقوا إلى تسوية البيانات. كذلك فإن طرقهم التي استخدموها في التحليل كانت مختلفة تمامًا عما ورد هنا في البحث.

التوزيع المسبق للمعلمات

إذا أريد تطبيق التسوية البييزية على متجه المشاهدات المحولة د (فَ) فإنه يجب أن يكون التوزيع المسبق للمعلمات (Prior distribution) من وحدات متناسبة لتلك المستخدمة في متجه المشاهدات المحولة. وعادة ما يكون هناك اختيار واضح بدرجة مناسبة عند إجراء التسوية للقيم المتوقعة للمتغيّرات ف (ر)، وقد رمزنا لهذا الاختيار بالرمز مـ (ر)، أى أن قم (ف) = مـ = متجه المتوسطات المسبقة بالوحدات الأصلية قبل التحويل. لذلك أصبح من الطبيعي أن نقول:

قم [د (ف)] = قم [{ مع (جا)}{ جذ (ف)}] = [مع (جا)] [جذ { قم (ف)}]

= [مع (جا)] [جذ (مـ)] = د (مـ)

أما بالنسبة لمصفوفة التباين المشترك المسبق فإنه نظرًا للنتيجة السابق التوصل اليها والخاصة بثبات تباين المعدّلات المحولة فلا حاجة تستدعى قيام المسوّى بتحديد تباين لـ د (ف) بل يمكنه بدلا من ذلك أن:

١) يدقق لكى يعرف ما إذا كانت البيانات المسبقة عن ف قد استمدت من مشاهدات حقيقية أم أرقام افتراضية للوفيات في الماضي وأن يحدد الحجم الحقيقي أو الافتراضي لهذه البيانات التي يفترض أننا استخلصنا منها معلوماتنا المسبقة عن ف، ولنرمز لهذا الحجم بالرمز ن (ر) لكل ف (ر)، ولنطلق على ن (ر) اسم العيّنة المكافئة (equivalent sample) ، وبترتيب هذه الأرقام على قطر مصفوفة نحصل على مصفوفة العيّنات المكافئة ن.

٢) يحدد مفردات مصفوفة الارتباط (correlation matrix) التي تحدد العلاقة بين كل معدّل وفاة وغيره من المعدّلات. كيميلدورف وجونز [٢] بيّنا أن مصفوفة الارتباط التي تعرف

العلاقة بين المتغيّرات ف (ر) هي الأداة الرئيسة لتحديد التسوية الموروثة من بيانات الماضي.

والسؤال الأخير في هذا الجزء حول تأثير التحويلات معكوس (جا) على معاملات الارتباط المحدّدة أصلاً بالوحدات الأصلية. وللإجابة عن ذلك نفترض أن ف (١) = و(١) ÷ ن (١) حيث و (١) لها توزيع احتمالي ثنائي الحدين بمعلمات هي [ن (١)، ف (١)] ولنفرض أن د [ف (١)] = [مع (جا)] [جذ {ف (١)}]، وباستخدام طريقة «مفكوك سلسلة تايلور Taylor series expansion» سيكون من السهولة إثبات النتائج السابق تأكيدها وهي أن:

* عندما ن (ر) ← ∞ فإن، نها قم [د {ف (ر)}] = د {ف (ر)}
* عندما ن (ر) ← ∞ فإن، نها تباين [جذ {ن (ر)} × د {ف (ر)}] = ٠,٢٥

بالطريقة نفسها يمكن كتابة ف (٢) = و (٢) ÷ ن (٢) حيث و (٢) لها توزيع احتمالي ثنائي الحدين بمعلمات هي [ن (٢)، ف (٢)]. فإذا فرضنا أن معامل الارتباط بين ف (١)، ف (٢) هو ر (٢١) فإنه يمكن استخدام مفكوك سلسلة تايلور وإثبات أن:

$$\underset{\text{ن (١)، ن (٢)} \to \infty}{\text{نـهـا}} \frac{\text{قم [د \{ف (١)\} د \{ف (٢)\}] - قم [د \{ف (١)\}] قم [د \{ف (٢)\}]}}{\text{ع [د \{ف (١)\}] × ع [د \{ف (٢)\}]}} = \text{ر (٢١)}$$

(حيث ع [٠] ترمز إلى الانحراف المعياري لـ [٠])

أي أن الارتباط بين المعدّلات الخام بالوحدات الأصلية يظل يساوي الارتباط بينها بعد تحويلها باستخدام دالة معكوس جيب الزاوية (arc-sine transformations).

وبذا فإن المسوّي يستطيع أن يحدد التوزيع المسبق لـ «ف» عن طريق تحديد قيمة متجه المتوسطات «م» وتحديد مصفوفة العيّنات المكافئة «ن» وتحديد مصفوفة ارتباط يضمنها معلوماته المسبقة عن العلاقة بين المعدّلات الحقيقية (أي مدى نعومة مفردات ف). هذه المعلومات المسبقة ينظر لها على أنها مستمدة من مشاهدة الوفيات في الماضي. وكما سبق القول

فإنها تخضع تقريبًا للتوزيع الطبيعي المتعدد وتتحسن درجة التقريب في هذا الغرض كلما زاد حجم العيّنات المكافئة، وعند تطبيق دالة معكوس جيب الزاوية على التوزيع المسبق فإنه تطبيقًا للنظرية السابق ذكرها وملاحظة ثبات معامل الارتباط قبل وبعد التحويلات يمكن إثبات أن د (ف) ستأخذ تقريبًا شكل التوزيع الطبيعي المتعدد بمتجه متوسطات د (مـ) ومصفوفة تباين مشترك «د (ا) = ر (ل ك) ÷ ٤ × جذ [ن (ل) ن (ك)] »وللاختصار فقد تم إهمال بعض التفاصيل والبراهين.

والسؤال الآن هو **كيف يمكن اختيار مفردات مصفوفة الارتباط ر (ل ك)؟**.
استعمل كيميلدورف وجونز [٢] مصفوفة ارتباط من الشكل (حـ ا س | ل ـ ك |) وبررا ذلك بأن أوضحا أن النتيجة سوف تكون مقبولة عندما تمزج هذه المصفوفة مع الانحرافات المعيارية الموجبة حيث ستنتج مصفوفة تباين مشترك موجبة التحديد (positive definite covariance matrix) . وكما هو معروف فإن هذا النوع من مصفوفات التباين المشترك له دور مهم وحيوي للوصول إلى نتائج تسوية البيانات. هذا النوع من مصفوفات التباين المشترك نفسه كان موضوع مناقشات وتحليلات اكتوارية كثيرة حديثة من خلال نظرية المصداقية كما فعل شر Shur [٩] حيث بيّن أنه إذا كانت مصفوفة التباين المشترك من الشكل (حـ ا س | ل ـ ك |)، فإنه لإثبات أنها من النوع الموجب التحديد يكفي إثبات أن محدد هذه المصفوفة = (١ ـ حـ) ا س (ن ـ١)، وقد قام بإثبات ذلك.

أثبت كيميلدورف وجونز في مثالهم الرقمي أن م حـ = قيمة موجبة كبيرة قريبة من الواحد الصحيح أى قريبة من الارتباط التام الطردي = **٠,٩٤٢٨٠٩**، وأثبتا أن هذه القيمة نتيجة طبيعية لتركز التوزيع المسبق لاحتمالات الوفاة عند سن معيّنة بمعلومية احتمال الوفاة عند السن المجاورة. وبالرغم من أن هذا السبب مقبول علميًّا في فئة معيّنة من الأعمار إلا أنه لا يتمتع بالقدر نفسه من القبول عند الأعمار الصغيرة لأن النعومة أو التسوية المستمرة (monotone smoothness) ليست خاصية من خواص احتمالات الوفاة للأعمار الأقل من **٣٥** سنة [انظر رسوم احتمالات الوفاة في مقالة مايرز Myers [١٠] الخاصة بجداول الحياة لتأييد العبارة السابقة حيث توضح هذه الرسوم التحدب (hump) الذي يبدو كخاصية

لاحتمالات الوفاة بين صغار البالغين من الذكور]. وبالتالي فبالنسبة لهذه الأعمار يبدو أنه من غير المناسب أن نفترض ارتباطًا موجبًا قويًا بين احتمالات الوفاة عند الأعمـــار المتجاورة في الجـدول. وسبب ذلـك هو أن مسببـات الحـوادث العشوائية تطغى هنا على مبدأ التسوية العمرية، فعند هذه الأعمار لا يفيد معرفة معلومات عن أحد احتمالات الوفاة في تقليل تباين التوزيعات الاحتماليـــة الشرطية المسبقة لاحتمالات الوفاة عند الأعمار المجاورة في هذا المدى.
لهذا السبب فإن مصفوفة الارتباط المسبقة يجب أن تأخذ الشكل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ر & ٠ \end{bmatrix} = د$$

، حيث ر = (حـ ا س |ل ـ ك|)

حيث «ا» تمثل مصفوفـــة الوحدة ويحدد حجمها بحيث تناظر عدد الفئات العمرية التي لا تكـون التسوية العمرية المستمرة إحدى خصائص المعلومات المسبقة عنها. وفي الفئات العمرية التي يكون للتوزيع المســبق فيها معاملات ارتباط = صفر فإنه يمكن الوصول إلى نتيجة مبسطة خاصة بمتوسط التوزيع اللاحق المحول إذا كانت المشاهدات مستــقلة عن بعضها البعض على الصورة الآتية:

قم [د { ف (ر)}] = [ن (ر) × د { فَ (ر)} + نَ (ر) × د {مـ (ر) }] ÷ [ن (ر) + نَ (ر)]

وهذه الصورة لا تطابــق فقط نظرية المصداقية بل أيضًا تطابق طريقة تسوية البيانات باستخدام الجداول المعيارية. ويصور لنا هذا الاقتراح قابليـــة المصفوفات على الصورة «د» الإندماج مع مصفوفات الانحرافات المعيارية الموجبة لكى ينتج لنا مصفوفات تباين مشترك مسبق أكثر مناسبة ويبين لنا ضرورة التأكيد على عدم اختيار مصفوفات التباين المشـــترك إلا بناءً على دراسة نتائج وخبرة وبيانات الماضي بدقة كافية.

مقاييس درجة الدقـــة

تسوية جـــداول الحياة عملية متعددة الأبعاد (multidimensional process). فبغض النـظر عن استعـمال الـطرق البييزية من عدمه فإن التسوية تشمل عملية المزج بين متجه

المشاهدات فَ مع معلومات مسبقة ذات أبعاد هي الأخرى. وحقيقة الأمر أنه لا يمكن تبرير إجراء تسوية للجداول إن لم تكن هناك معلومات مسبقة عن بياناتها. ومن الطبيعي وجوب البحث عن مقياس لدرجة الدقة precision measure في كل من نوعيْ البيانات التي تمثل المدخلات (المشاهدات والمعلومات المسبقة). ومن المعروف أنه يوجد طرق متعددة لقياس درجة الدقة لأى منظوم من البيانات ذات الأبعاد المتعددة، لكن في حالتنا هذه التي استخدمنا فيها التوزيعات الطبيعية المتعددة المتزاوجة فإن ذلك يملي علينا قياس الدقة في المعلومات الداخلة في التسوية من المصدرين عن طريق استعمال محددات معكوسات مصفوفات التباين المشترك للتوزيع المسبق وتوزيع بيانات المشاهدات وذلك لأنه من المعروف أن مصفوفة التباين المشترك يسمى التباين العام للتوزيع (distribution's generalized var-iance) لذلك فإنه يمكن اعتبار معكوس مصفوفة التباين المشترك مقياسًا لدرجة تركيز أو تكدس التوزيع. أى أنه يمكن اعتبار معكوس المصفوفة «ا» مصفوفة دقة تصف لنا درجة التركيز لمتجه المعلومات المسبقة عن الوفيات ومعكوس المصفوفة «ب» مصفوفة دقة تصف لنا درجة التركيز لمتجه المشاهدات من الوفيات.

وكثيرًا ما يكون أحد الأهداف المختارة عند تصميم التجارب هو تعظيم قيمة محدد مصفوفة الدقة. ومحدد مصفوفة الدقة يتناسب عكسيًّا مع مربع حجم مخروط التركيز صـ(elli-psoid of concentration) للتوزيع الطبيعي المتعدد. فإذا علمنا أن مخروط التركيز هو مقياس تقليدي لدرجة تركيز كثافة الاحتمالات تحت التوزيع الطبيعي المتعدد [١١] فإنه يمكن النظر للتوزيع ذي مخروط التركيز من الحجم الصغير (وقيمة كبيرة لمحدد مصفوفة الدقة) على أنه أكثر تركيزًا من غيره.

من الواضح أنه سيكون من السهولة حساب قيمة محدد كل من مصفوفات الدقة «مع (ا)، مع (ب)» وذلك بسبب طريقة تكوين مصفوفات التباين المشترك المستخدمة في هذا البحث ا، ب. فإذا رمزنا إلى محدد معكوس المصفوفة «ا» بالرمز مح مع (ا) فإنه يمكن إثبات

مح مع (ا) = مع [مر { ع (١) } × مر {ع (٢) } × . . . . . . × مر { ع (ن) } × مح (ر)]

حيث «ر» هي مصفوفة الارتباط، مر = مربع = ا س (٢). وباستخدام رموز الأجزاء السابقة

فإنه إذا كانت ر=(حـ ا س | ل ـ ك |) فإن مح (ر) = (١ ـ حـ) ا س (ن ـ١) وإذا كانت مصفوفة الارتباط هي «د» والموضحة فيما سبق فإن مح (د) = (١ ـ حـ) ا س (ك ـ ١) حيث ك هي حجم المصفـوفة المربعة «ر»، ك ⩽ ن. ونتيجة للفرض الخاص بالاستقلال المتبادل (mutual independency) للمشاهدات المحولة للوفيات في المجموعات تحت الدراسة فإن مؤشّر أو مقياس الدقة مح مع [د (ا)] = ٤× Π ض (ر) (حيث Π = حاصل ضرب) ويصبح من الممكن استخدام النسبة «ق = جذ [مح مع { د (ا) } ÷ مح مع { د (ب) }]» لتحديد الدقة النسبية لنوعيْ المدخلات لإجراءات التسوية (المعلومات المسبقة والبيانات المشاهدة). فإذا كانت قيمة ق > ١ فإن هذا يعني أن المعلومات المسبقة أكثر دقة من معلومات المشاهدات الحديثة. وإذا كانت ق < ١ فإن المشاهدات الحديثة تكون أكثر دقة من المعلومات المسبقة.

وإذا تذكرنا أن د (ا) = (حـ ا س | ل ـ ك |) ÷ [٤ × جذ { ن (ل) ن (ك) }]، د (ب) = مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيس هي [١ ÷ { ٤ ض (ر)] } فإن مقياس الدقة النسبي ق يمكن كتابته على الصورة «ق = جذ [{ Π ن (ر) ÷ ض (ر) } ÷ { ١ـ مر (حـ) } ا س (ك ـ١)]. ويمكن ملاحظة أن «ق» لها التفسير نفسه الذي تأخذه «h » في معادلة الفروق في طريقة ويتكر ـ هندرسون ـ Whittaker Henderson في تسوية البيانات وهو الخاص باعتبار h مقياسًا للأهمية النسبية لكل من جودة التوفيق ونعومة التسوية. فكلما صغرت قيمة h أو ق زاد التركيز على جودة التوفيق وكلما زادت قيمة h أو ق زاد التركيز والاهتمام بنعومة المعدّلات المسوّاة.

في الحقيقة فإن ويتكر [٤] قد فسر h في دالة الخسارة التي كتبها على الصورة

$$F + hs = \text{Fit} + h \times \text{Smoothness}$$

على أنه : (١) معدّل دقة التوزيع الطبيعي الذي يقيس مدى التأكد من النعومة.
(٢) الدقة المفترضة والشائعة في البيانات المشاهدة.

ومن الواضح أن هذا الرقم الوصفي h والمعرّف في هذا الجزء هو مقياس عام. لكن إذا أردنا البعد عن العمل بدلالة الوحدات المربعة فيجب عدم استخدام h ، لذلك سوف نستخدم ق بدلاً من h في هذا البحث كمقياس للدقة.

وبذا يمكن القول بأن استخدام طريقة بييز في التسوية بغرض تعديل تقديراتنا المسبقة لمعدّلات الوفاة على ضوء البيانات المشاهدة لكى تصبح تقديرات لاحقة مشروطة بالمشاهدات لابد وأن يؤدي إلى كسب أو تحسين في درجة الدقة في البيانات والمعلومات. هذا الكسب في درجة الدقة أو مقدار التحسن فيها من المرحلة المسبقة إلى المرحلة اللاحقة المشروطة (أى بعد جمع البيانات والمشاهدات الحديثة) يمكن تحويله إلى مقياس رقمي باستخدام نفس الفلسفة السابقة ووضعه على صورة المعدّل:

جذ [{ مح [مع { د (ا) } + مع { د (ب) }] ÷ مح مع { د (ا) }]

البيانات المُسَوّاه

وفقًا للافتراضات السابقة أمكن تحديد التوزيع اللاحق الشرطي للمتغيرات العشوائية د (ف) بمعلومية قيمة المعدّلات المشاهدة د (فَ) حيث أمكن إثبات أنه يأخذ شكل التوزيع الطبيعي المتعدد بمتجه متوسطات د (فَ) = [د (ج)] × [مع { د (ا) } × د (مـ) + مع { د (ب) } × د (فَ)] ومصفوفة تباين مشترك د (ج) = مع [مع { د (ا) } + مع { د (ب) }]

ولإعادة متجه المتوسطات د (فَ) إلى الوحدات الأصلية يجب تطبيق معكوس التحويلات السابق استخدامها. أى أنه يجب حساب مربع جيب زاوية د (فَ) لكى نصل إلى قيمة المعدّلات المُسَوّاه بالوحدات الأصلية فَ.

أى أن: فَ = مر [جا { د (فَ) }]

وبالرغم من أن كيميلدورف وجونز [٢] اقترحا تقديم قيم متجه المتوسطات اللاحقة المشروطة بعد إعادتها إلى الوحدات الأصلية كتقدير مناسب لقيم المعدّلات المُسَوّاة فَ. وقد سبق إيضاح مبررات ومنطقية هذا الإقتراح الذي نأخذ به في هذا البحث، إلا أنه تجدر الإشارة إلى وجوب تحديد الهدف النهائي من التسوية وتحديد مجال استخدام المعدّلات المُسَوّاة أولاً. فمثلاً إذا كانت الاحتمالات المُسَوّاة سوف تستخدم في بعض مشاكل اتخاذ القرارات فقد يكون من الأفضل اختيار قيم المعدّلات المُسَوّاة بطريقة أكثر تحفظًا وتميل أكثر إلى جانب الاحتياط من القيم المتوسطة. عندئذ يمكن القول بأن القيم المُسَوّاة فَ يمكن

تحديدها بالطريقة الآتية: بما أن كل متغيّر من المتغيّرات د [ف (ر)]، ر = ١، ٢، . . . . . ، ن له توزيع لاحق مشروط يمزج بين جميع المعلومات المتاحة حول المتغيّرات التي تم تقديرها. هذا التوزيع اللاحق الشرطي يمكن تقريبه بتوزيع طبيعي متوسطه = م (ر)، (يمكن استخراجه من متجه المتوسطات اللاحقة المشروطة)، وتباينه = ج (ر)، (يمكن استخراجه من على القطر الرئيسي لمصفوفة التباين المشترك اللاحق المشروط)، وبذلك يمكن الوصول إلى مجموعة من القيم المُسَوّاة الأكثر تحفظًا فَ التي تحقق العلاقة -

ح [د (ف) < د (فَ)] = ح (ف < فَ) = ء، (حيث ح= احتمال)

وللأسباب السابق ذكرها والتي قد تدفعنا لاختيار قيم أكثر تحفظًا للبيانات المُسَوّاة يمكن تحديد قيمة ء سلفًا بحيث تحقق هذا الهدف. فمثلاً يمكن وضع ء = ٧٥٪ وتحديد قيم فَ التي تحقق ذلك من المعادلة السابقة. أيضًا يمكن استعمال الطريقة نفسها لحساب معدّلات مُسَوّاة تصلح للاستخدام في تقدير أقساط تأمينات الحياة المؤقتة. ونظرًا للاستخدامات المتعددة للاحتمالات المُسَوّاة فإنه يصبح من الضروري تقديم التوزيع اللاحق الشرطي لاحتمالات الوفاة نفسها كنتيجة للدراسة ثم تبيان الطرق المناسبة للوصول إلى قيم المعدّلات المُسَوّاة المناسبة لكل منها.

تطبيق طريقة التسوية البييزية
على بيانات فعلية من الخبرة المصرية

لكى تكتمل الفائدة من هذا البحث فسوف نقوم في الأجزاء القادمة بتوضيح إجراءات وخطوات طريقة التسوية البييزية وتطبيقها على بيانات خبرة فعلية مجمعة من سوق التأمين المصرية [١٢]. وقد كان من المهم أن يصمم هذا المثال التطبيقي بحيث يكون على شاكلة مثال كيميلدورف وجونز [٢] حتى يمكن المقارنة وتوضيح الأفكار السابق سردها في هذا البحث بالإضافة إلى توضيح كيفية تمديد هذه الطريقة الحديثة من طرق التسوية. ويمكن المضى في خطوات تنفيذ التسوية البييزية كما يلي:

أولاً: جمع وتحديد قيمة المعدّلات الخام

يبين الجدول رقم ١ البيانات الخام التي تم تجميعها من خبرة سوق التأمين بمصر والتي سبق استخدامها من قبل المنصوري ومرجان [١٢] في بحث بعنوان «تسوية معدّلات الوفاة باستخدام الطرق اللامعلمية»، وكما سبق القول فسوف يتم توضيح خطوات تطبيق هذه الطريقة الحديثة للتسوية على هذه البيانات الفعلية.

جدول رقم ١. البيانات الخام المجمعة من خبرة سوق التأمين بمصر [١٢]

العمـــر (ر)	المقدار المعرض للخطر ض (ر)	عـدد الوفيات و (ر)	معدّل الوفـاة الخـام فَ (ر)
١٢,٥	٣٧٣٤٢,٥	٢٧	٠,٠٠٠٧٢٣
١٧,٥	٢٦٧٠٨	٢٨	٠,٠٠١٠٤٨
٢٢,٥	٢٩٥٠٨	٤٠	٠,٠٠١٣٥٦
٢٧,٥	٤٩٠٨٦,٥	٦٩	٠,٠٠١٤٠٦
٣٢,٥	٣٢٩٣٩٣,٥	٤٦٦	٠,٠٠١٤١٥
٣٧,٥	٣٢٢٦٣٣	٦٤٤	٠,٠٠١٩٩٦
٤٢,٥	٢٨٤٧٠٦,٥	٨٤٧	٠,٠٠٢٩٧٥
٤٧,٥	١٤٨٨٥٦	٧٢٨	٠,٠٠٤٨٩١
٥٢,٥	٥٨٦٤٨,٥	٤٨١	٠,٠٠٨٢٠١
٥٧,٥	١٨٩٩٦٥	٢٦٢	٠,٠١٣٧٩٢
٦٢,٥	٢٧٩١	٦٤	٠,٠٢٢٩٣١
المجموع	١٣٠٨٦٦٩	٣٦٥٦	٠,٠٦٠٧٣٤

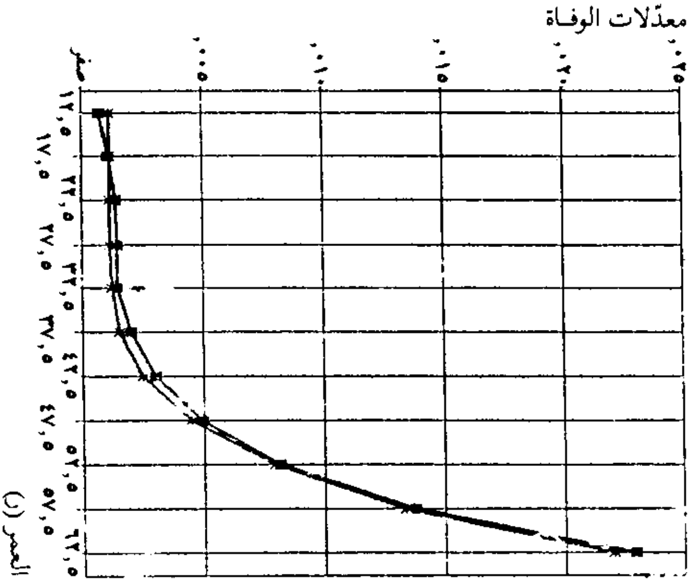
ثانيًا: تحديـد التوزيـــع المسـبق

التوزيع المسبق يتم تحديده عن طريق تحديد معلماته. هذه المعلمات نلخصها في متجه المتوسطات المسبقة (prior mean vector) «مـ» ومصفوفة التباين المشترك المسبق (prior variance covariance matrix). ولاختيار القيم المناسبة في هذا البحث لمدخلات متجه المتوسطات المسبق فقد تم فحص أربعة مصادر يمكن استخدامها لتحديد قيمة هذه

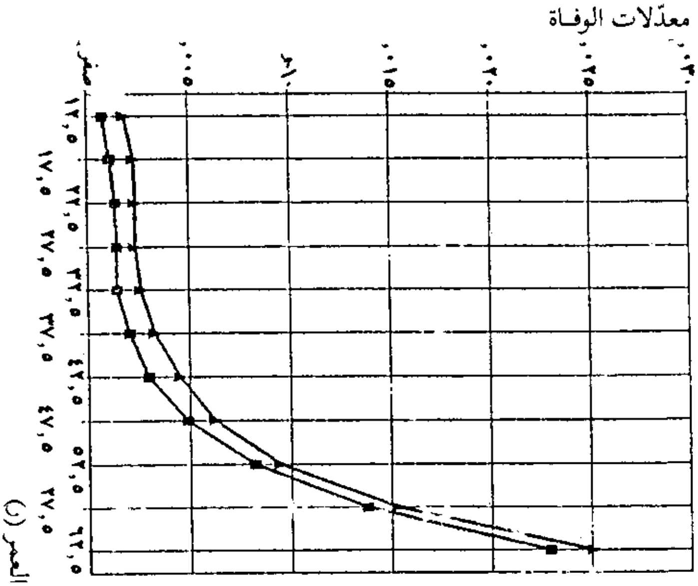
المدخلات وهذه المصادر هي معدّلات الوفاة النهائية لجدول الحياة الإنجليزي ٢٤-١٦٢٩م، جدول الحياة الإنجليزي ٤٩-١٩٥٢م، جدول الحياة الأمريكي ١٩٥٨م، جدول الحياة الأمريكي ٥٩-١٩٦١م. وبدراسة المصادر الأربعة ومقارنة معدّلات الوفاة بكل منها مع معدّلات الوفاة الخام فقد وجد أن معدّلات المصدرين الأول والثاني تتميز عن معدّلات المصدرين الثالث والرابع في أن معدّلات الوفاة بهما لها الاتجاه نفسه والشكل الخاص بمعدّلات الوفاة الخام المصرية خاصة في الأعمار التي نهتم بالتسوية فيها وهي الأعمار غير الصغيرة (أكبر من ١٥ أو ٢٠ عامًا مثلاً) بما يعطي الانطباع إلى أن خبرة الوفاة بين المصريين أقرب إلى خبرة الوفاة بين الإنجليز (أنظر جدول رقم ٢ والأشكال من ١ إلى ٥).

جدول رقم ٢. معدّلات الوفاة الخام «ف» ومعدّلات الوفاة الحقيقية «م» وفقًا لأربعة مصادر مختلفة بالوحدات الأصلية

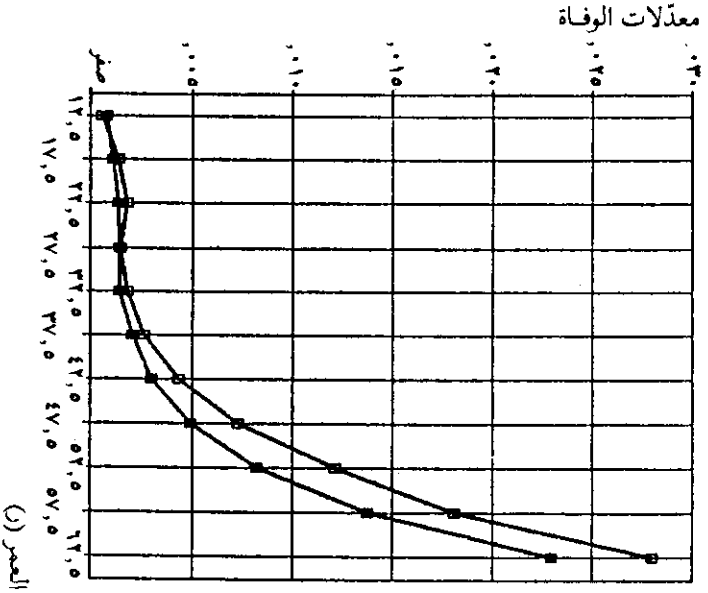
العمر	معدّلات الوفاة				
	الخام	الإنجليزية		الأمريكية	
		٢٤-١٩٢٩م	٤٩-١٩٥١م	١٩٥٨م	٥٩-١٩٦١م
١٢,٥	٠,٠٠٠٧٢٣	٠,٠٠١٨١٠	٠,٠٠١١١٠	٠,٠٠١٢٩٠	٠,٠٠١٢٩٠
١٧,٥	٠,٠٠١٠٤٨	٠,٠٠٢٢٧٩	٠,٠٠١١١٠	٠,٠٠١٦٥٥	٠,٠٠١٣٢٥
٢٢,٥	٠,٠٠١٣٥٦	٠,٠٠٢٣٤٩	٠,٠٠١١١٠	٠,٠٠١٨٧٥	٠,٠٠١٧٣٠
٢٧,٥	٠,٠٠١٤٠٦	٠,٠٠٢٣٥٤	٠,٠٠١١٣٠	٠,٠٠٢٠١٠	٠,٠٠١٤٥٠
٣٢,٥	٠,٠٠١٤١٥	٠,٠٠٢٥٧٤	٠,٠٠١٢٠٠	٠,٠٠٢٢٨٥	٠,٠٠١٧٦٠
٣٧,٥	٠,٠٠١٩٩٦	٠,٠٠٣٣٠٤	٠,٠٠١٤٧٠	٠,٠٠٢٩٠٥	٠,٠٠٢٥٨٠
٤٢,٥	٠,٠٠٢٩٧٥	٠,٠٠٤٥٢٤	٠,٠٠٢٣١٠	٠,٠٠٤٣٥٠	٠,٠٠٤٣١٥
٤٧,٥	٠,٠٠٤٨٩١	٠,٠٠٦٢٧٤	٠,٠٠٤٢٠٠	٠,٠٠٦٦٥٥	٠,٠٠٧٢٦٠
٥٢,٥	٠,٠٠٨٢٠١	٠,٠٠٩٤٧٩	٠,٠٠٧٥٠٠	٠,٠٠١٤٢٥	٠,٠١٢١٣٠
٥٧,٥	٠,٠١٣٧٩٢	٠,٠١٥٢٨٩	٠,٠١٢٧٢٠	٠,٠١٦٢٧٠	٠,٠١٨١٠٥
٦٢,٥	٠,٠٢٢٩٣١	٠,٠٢٥١٢٣	٠,٠٢٠٩٦٣	٠,٠٢٥٤٤٠	٠,٠٢٨٠١٠
المجموع	٠,٠٦٠٧٣٤	٠,٠٧٥٣٥٩	٠,٠٥٤٨٢٣	٠,٠٧٥١٦٠	٠,٠٧٩١٩٥



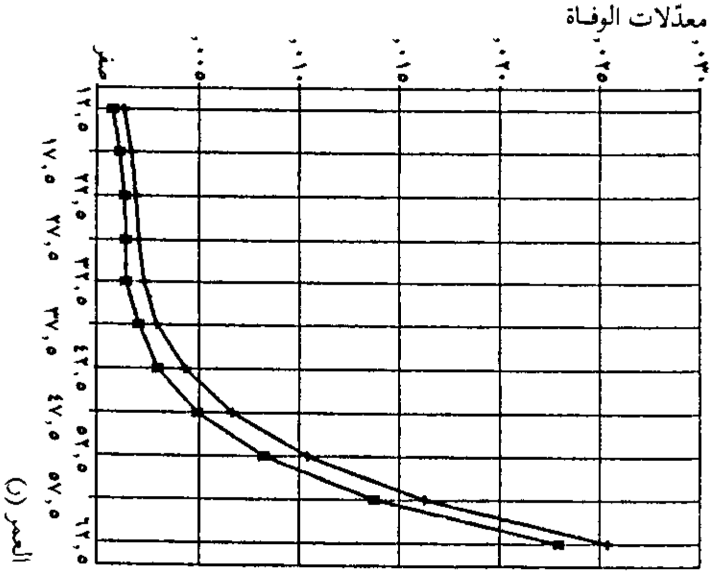
شكل رقم ٢ . المعدّلات الخام (■) والانجليزية ٤٩
(بالوحدات الأصلية)



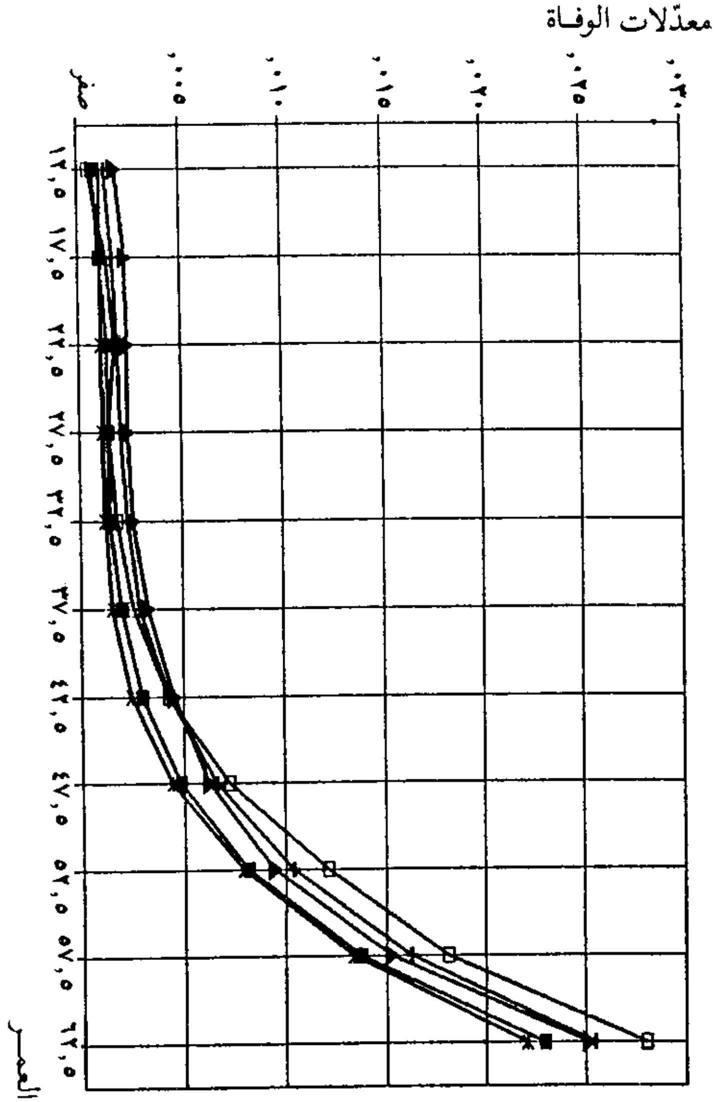
شكل رقم ١ المعدّلات الخام (■) والانجليزية ٢٤
(بالوحدات الأصلية)



شكل رقم ٤ . المعدّلات الخام (■) والأمريكية ٥٩
(بالوحدات الأصلية)



شكل رقم ٣ . المعدّلات الخام (■) والأمريكية ٥٨
(بالوحدات الأصلية)



شكل رقم ٥. المعدّلات العام (■) والإنجليزية ٢٤ (▲)، ٤٩ (*) والأمريكية ٥٨ (+)، ٥٩
(بالوحدات المُحوّلة) (□)

ولاختيار الجدول الإنجليزي المناسب فقد اتجهنا إلى السوق المصري الذي وجد أنه قد اعتاد على استخدام المصدر الأول لتقدير معدّلات الوفاة المصرية حتى زمن قريب (عام ١٩٨٤م)، ثم استقر الرأى في السوق المصري في عام ١٩٨٤م إلى التحول إلى استخدام المصدر الثاني لتقدير تلك المعدّلات والذي مازال يستخدم حتى الآن وذلك بسبب عدم توافر جدول حياة مصرى. لذا يمكن القول بأنه عند عدم توافر جدول حياة مبنى على خبرة حقيقية مصرية فإن السوق قد لجأ إلى الخبرة الإنجليزية في الأربعينات والخمسينات لتقدير معدّلات الوفاة المصرية في الثمانينات. لذلك فقد تأكد لنا بأن خبرة وفيّات الشعب المصري في الثمانينات يمكن تقريبها بخبرة وفيّات الشعب الإنجليزي في نهاية الأربعينات وبداية الخمسينات. وبذا فقد تم تفضيل معدّلات الوفاة النهائية بالجدول الإنجليزي ٤٩ـ١٩٥١م في تقدير قيم معدّلات الوفاة المسبقة لتكون هي مدخلات متجه المتوسطات المسبق «مـ».

وبما أن خطتنا في هذا الجزء من البحث هي تطبيق التسوية البييزية على متجه المعدّلات المُحوّلة د (فَ) لذا يجب تطبيق التحويلات نفسها على مفردات متجه المتوسطات لكى نحدد قيمة متجه المتوسطات بالوحدات الجديدة د (مـ) لذا فقد تم تطبيق التحويلات المذكورة على المعدّلات المرشحة للاختيار (أنظر جدول ٣، والأشكال من ٦ إلى ١٠).

ولتحديد قيمة مفردات مصفوفة التباين المشترك المسبق يجب:

١) **تحديد مفردات مصفوفة الارتباط «د»**

مصفوفة الارتباط ستأخذ الشكل «د» السابق الإشارة اليه بأجزائه الأربعة:

- مصفوفة الوحدة «١» من الحجم ٤×٤ لتحدد الفئات الأربع العمرية التي لا تتميز معدّلات الوفاة فيها بخاصية التسوية المستمرة.
- مصفوفتا الصفر «٠» من الحجم ٤×٧، ٧×٤ لتبين انعدام الارتباط بين معدّلات الوفاة في الأعمار الصغيرة ومعدّلات الوفاة في غيرها من الأعمار.

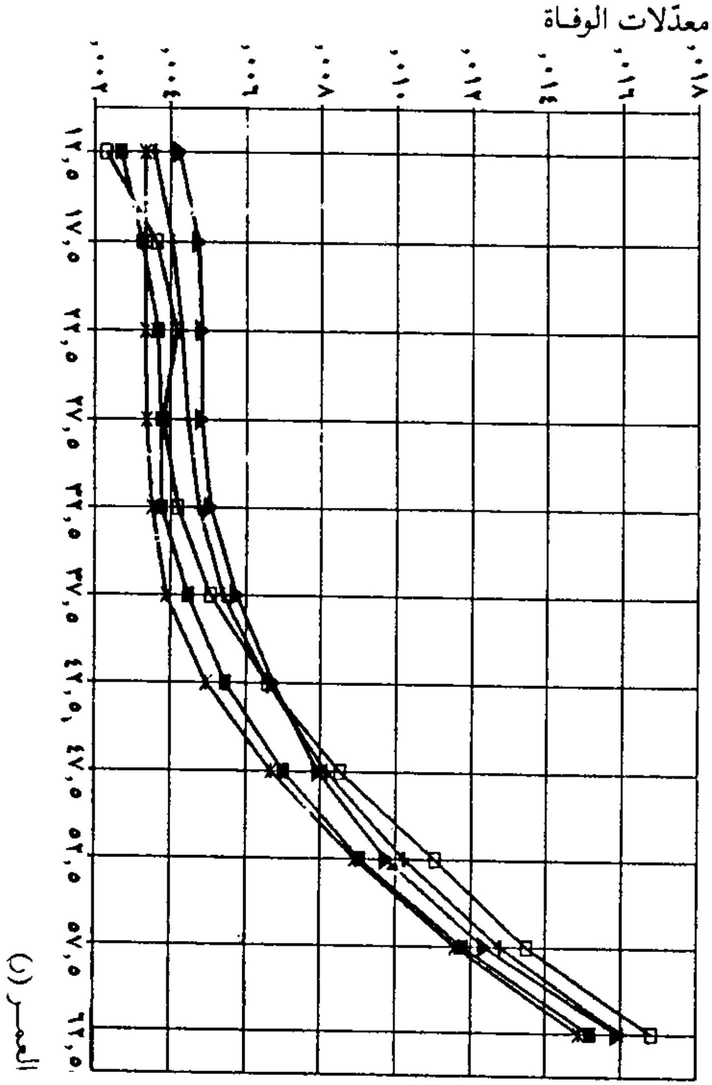
● ثم الجزء الرابع وهي مصفوفة الارتباط من الشكل «ر» = (حـ ا س | ل ـ ك|) . حيث اختيرت قيمة جـ = ٠,٩٤٢٨٠٩ وهي القيمة نفسها التي أثبتها كيميلدورف وجونز واستخدماها في البحث [٢]. جدول رقم ٤ يوضح قيم مفردات المصفوفة «د».

٢) تقدير مفردات مصفوفة العيّنات المكافئة «ن»

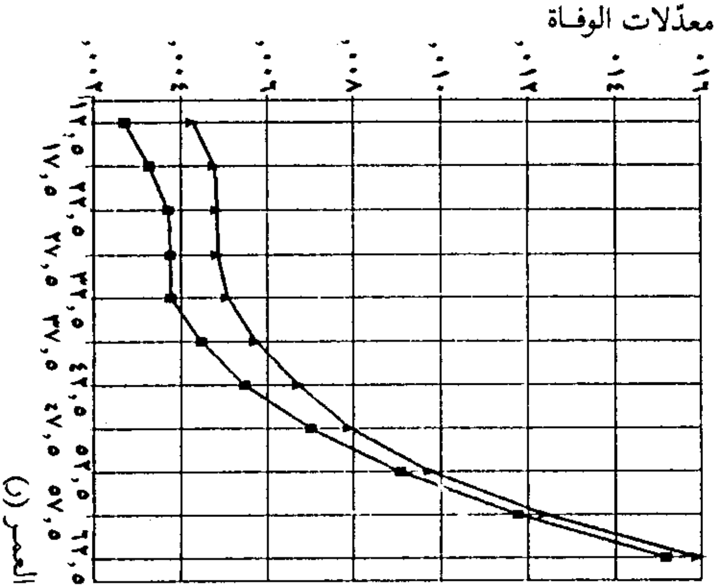
تحدد مفـردات هذه المصفـوفة مدى مصداقية البيانات والمعدّلات المسبقة «مـ» ومـدى تمثيلهـا للمعـدّلات الحقيقية «ف». وبعـد أن تم اختيار بيانـات جدول الحياة

جدول رقم ٣. معدّلات الوفاة الخام د «فَ» ومعدّلات الوفاة الحقيقية د «مـ» وفقًا لأربعة مصادر مختلفة بالوحدات المحولة

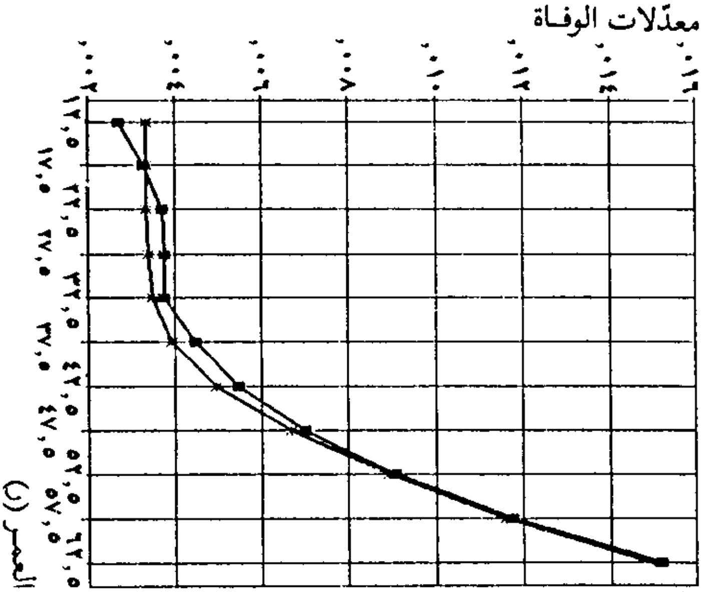
العمر	معدّلات الوفاة				
	الخام	الإنجليزية		الأمريكية	
		٢٤-١٩٢٩م	٤٩-١٩٥١م	١٩٥٨م	٥٩-١٩٦١م
١٢,٥	٠,٠٢٦٨٩٣	٠,٠٤٢٥٥٧	٠,٠٣٣٣٢٢	٠,٠٣٥٩٢٤	٠,٠٢٣٠٢٤
١٧,٥	٠,٠٣٢٣٨٤	٠,٠٤٧٧٥٧	٠,٠٣٣٣٢٢	٠,٠٤٠٦٩٣	٠,٠٣٦٤٠٩
٢٢,٥	٠,٠٣٦٨٢٦	٠,٠٤٨٤٨٥	٠,٠٣٣٣٢٢	٠,٠٤٣٣١٥	٠,٠٤١٧٠٥
٢٧,٥	٠,٠٣٧٥٠١	٠,٠٤٨٥٣٧	٠,٠٣٣٦٢١	٠,٠٤٤٨٤٨	٠,٠٣٨٠٨٨
٣٢,٥	٠,٠٣٧٦٢٢	٠,٠٥٠٧٥٦	٠,٠٣٤٦٤٧	٠,٠٤٧٨٢٠	٠,٠٤١٩٦٥
٣٧,٥	٠,٠٤٤٦٩٢	٠,٠٥٧٥١٢	٠,٠٣٨٣٤٩	٠,٠٥٣٩٢٤	٠,٠٥٠٨١٦
٤٢,٥	٠,٠٥٤٥٧١	٠,٠٦٧٣١٢	٠,٠٤٨٠٨٠	٠,٠٦٦٠٠٢	٠,٠٦٥٧٣٦
٤٧,٥	٠,٠٦٩٩٩٠	٠,٠٧٩٢٩٢	٠,٠٦٤٨٥٢	٠,٠٨١٦٦٩	٠,٠٨٥٣٠٩
٥٢,٥	٠,٠٩٠٦٨٦	٠,٠٩٧٥١٥	٠,٠٨٦٧١١	٠,١٠٢٢٨١	٠,١١٠٣٦٠
٥٧,٥	٠,١١٧٧١٣	٠,١٢٣٩٦٦	٠,١١٣٠٢٣	٠,١٢٧٩٠٢	٠,١٣٤٩٦٤
٦٢,٥	٠,١٥٢٠١٤	٠,١٥٩١٧٤	٠,١٤٥٢٩٦	٠,١٦٠١٨٣	٠,١٦٨١٥٣
المجموع	٠,٧٠٠٨٩٢	٠,٨٢٢٨٦٢	٠,٦٦٤٥٥٣	٠,٨٠٤٥٦٢	٠,٧٩٦٤٢٩



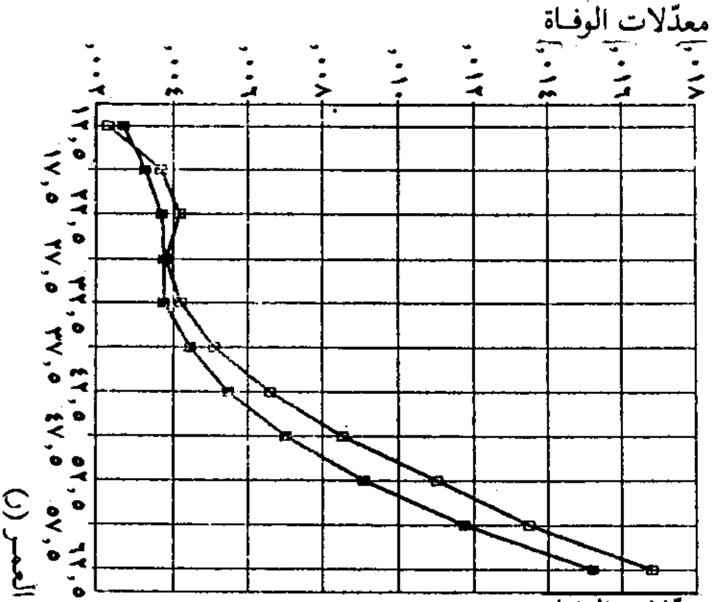
شكل رقم ٦. المعدلات الخام (■) والإنجليزية ٢٤ (▲)، ٤٩ (*) والأمريكية ٥٨ (+)، ٥٩ (بالوحدات المحوّلة) (□)



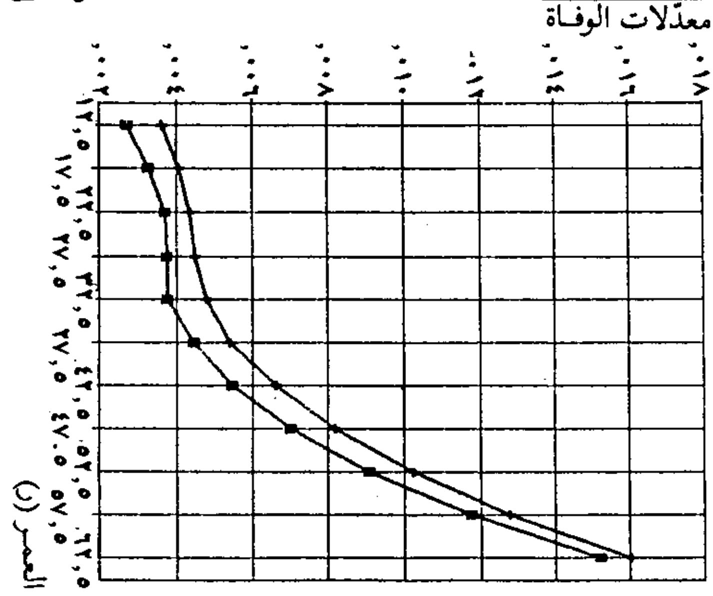
شكل رقم ٧ . المعدّلات العامّ (■) والإنجليزية ٢٤
(بالوحدات المُحوّلة)



شكل رقم ٨ . المعدّلات العامّ (■) والإنجليزية ٤٩
(بالوحدات المُحوّلة)



شكل رقم ١٠ . المعدلات الخام (■) والأمريكية ٩٩
(بالوحدات المُحوّلة)



شكل رقم ٩ . المعدلات الخام (■) والأمريكية ٨٥
(بالوحدات المُحوّلة)

جدول رقم ٤ . مصفوفـة الارتباط «د»

١,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠
٠,٠٠٠٠٠٠	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠
٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠
,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠
٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٩٤٢٨٠٩	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٨٣٨٠٥٢	٠,٧٩٠١٢٣	٠,٧٤٤٩٣٥	٠,٧٠٢٣٣٢
٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٩٤٢٨٠٩	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٩٤٢٨٠٩	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٨٣٨٠٥٢	٠,٧٩٠١٢٣	٠,٧٤٤٩٣٥
٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٩٤٢٨٠٩	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٩٤٢٨٠٩	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٨٣٨٠٥٢	٠,٧٩٠١٢٣
٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٨٣٨٠٥٢	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٩٤٢٨٠٩	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٩٤٢٨٠٩	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٨٣٨٠٥٢
٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٧٩٠١٢٣	٠,٨٣٨٠٥٢	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٩٤٢٨٠٩	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٩٤٢٨٠٩	٠,٨٨٨٨٨٩
٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٧٤٤٩٣٥	٠,٧٩٠١٢٣	٠,٨٣٨٠٥٢	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٩٤٢٨٠٩	١,٠٠٠٠٠٠	٠,٩٤٢٨٠٩
٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠٠٠	٠,٧٠٢٣٣٢	٠,٧٤٤٩٣٥	٠,٧٩٠١٢٣	٠,٨٣٨٠٥٢	٠,٨٨٨٨٨٩	٠,٩٤٢٨٠٩	١,٠٠٠٠٠٠

الإنجليزي ٤٩-١٩٥٢م كممثلاً للمعلومات المسبقة الخاصة بمعدّلات متجه المتوسطات المسبق «مـ» كان لزامًا دراسة بيانات هذا الجدول ومصادر إنشائه وعلى ضوء المقادير المعرضة للخطر تم فرض قيم لمفردات مصفوفة العيّنات المكافئة «ن» مبين بالجدول رقم ٥ .

جدول رقم ٥ . مصفوفـة العيّنات المكافئة «ن»

٧٤٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٥٤٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٦٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٩٨٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٦٥٨٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٦٤٨٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٥٧٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٢٩٨٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	١١٨٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٥٤٠٠	٠٠٠٠
٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٠٠٠٠	٧٤٠٠

٣) تحديد قيمة مفردات مصفوفة التباين المشترك المسبقة د (ا)

كما سبق القـول فإنـه بتحـديد مفردات مصفوفة الارتباط ومصفوفة العيّنات المكـافئـة يمكن تحديد قيمـة مفـردات مصفـوفـة التباين المشترك المسبق د (ا). بضرب المصفوفات مع (٤ ن) × د × مع (٤ن) أو بتحديد المفردات كل على حدة بقسمة ر (ل ك) ÷ [٤×جذ { ن (ل) ن (ك)}]، جدول رقم ٦ يوضح قيمة مفردات المصفوفة د (ا).

جدول رقم ٦. مصفوفـة التباين المشترك «د (ا)» (جميع الأرقام مضروبة في ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠)

٣٨٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٤٦٣	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٠٠٠	٤١٧	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٢٥٥	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٣٨	٣٦	٣٦	٤٧	٧١	٩٩	٨٠
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٣٦	٣٩	٣٩	٥١	٧٦	١٠٦	٨٥
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٣٦	٣٩	٤٤	٥٧	٨٦	١١٩	٩٦
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٤٧	٥١	٥٧	٨٤	١٢٦	١٧٥	١٤١
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٧١	٧٦	٨٦	١٢٦	٢١٢	٢٩٥	٢٣٨
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٩٩	١٠٦	١١٩	١٧٥	٢٩٥	٤٦٣	٣٧٣
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٨٠	٨٥	٩٦	١٤١	٢٣٨	٣٧٣	٣٣٨

بذا فقد تم تحديد كل مواصفات التوزيع الاحتمالي المسبق حيث إنه يمكن في هذه المرحلة كتابة:

د (ف) موزعة توزيعًا طبيعيًّا متعددًا بمتوسط د (مـ) وتباين مشترك د (ا). د (ا)، د (مـ) مبينة في جدول ٣، وجدول ٦.

ثالثًا: إجراءات التحليل البييزي للوصول إلى التوزيع اللاحق الشرطى

استعمال تحويلات معكوس جيب الزاوية سيؤدي إلى مزايا محددة سبق الإشارة اليها. لذا فلتحقيق هذه المزايا فإننا نحتاج إلى تطبيق هذه التحويلات على أرقام معدّلات الوفاة

الخام (فَ) المبينة في جدول رقم ١ للوصول إلى قيمة متجه المعدّلات الخام بالوحدات المحولة د (فَ) التي سيتم تسويتها باستخدام الطريقة البييزية. جدول رقم ٣ يبين قيمة المعدّلات الخام بالوحدات المحولة د (فَ).

ويمكن تطبيق إجراءات التحليل البييزي على هذه المعدّلات المحولة على المراحل الآتية:

لتحديد مصفوفة التباين المشترك اللاحقة

١) يجب الوصول إلى قيمة مصفوفة دقة بيانات التوزيع المسبق والتي يمكن تحديدها بايجاد معكوس مصفوفة التباين المشترك المسبق أى حساب قيمة «مع [د (ا)]. ويبين جدول رقم ٧ أرقام هذه المصفوفة.

جدول رقم ٧. مصفوفة دقة بيانات التوزيع المسبق «مع [د (ا)]»

٠٠٠٢٩٦٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٢١٦٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٢٤٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٣٩٢٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٢٣٦٨٧٩٨	-٠٢٢١٢٨٦٦	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	-٠٢٢١٢٨٦٦	٠٤٣٩٢٧٩٧	-٠٢٠٥٩٥٨٤	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	-٠٢٠٥٩٥٨٤	٠٣٨٧٥٩٩٧	-١٣٩٨٨٥١	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	-٠١٣٩٨٨٥١	٠٢٠٢٦٣٩٨	-٠٦٣٦٤٦٦	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	-٠٠٦٢٦٤٦٦	٨٠٢٣٩٩,٤	-٠٠٢٧٠٩٣٤	٠٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	-٠٠٢٧٠٩٣٤	٣٦٧١٩٩,٧	-٠٠٢١٤٥٥٥
٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠٠	-٠٠٢١٤٥٥٥	٢٦٦٣٩٩,٨

٢) يجب تحديد قيمة مفردات مصفوفة دقة البيانات الخام وذلك بحساب معكوس مصفوفة التباين المشترك لتوزيع معدّلات الوفاة الخام، أى حساب «مع [د (ب)]». جدول رقم ٨ يبين أرقام هذه المصفوفة.

جدول رقم ٨ . مصفوفة دقة بيانات التوزيع الخاص بمعدّلات الوفاة الخام «مع [د (ب)]» .

٠١٤٩٣٧٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠١٠٦٨٣٢	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠١١٨٠٣٢	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠١٩٦٣٤٦	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	١٣١٧٥٧٢	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	١٢٩٠٥٣٢	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	١١٣٨٨٢٦	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٥٩٥٤٢٤	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٢٣٤٥٩٤	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٧٥٩٨٤	٠٠٠٠٠٠٠
٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠٠٠٠٠٠	٠٠١١١٦٤

٣) والآن يمكن الوصول إلى قيمة مفردات مصفوفة التباين المشترك اللاحقة المشروطة د (ج) بمعلومية البيانات الخام المعدّلة د (فَ) بايجاد معكوس مصفوفة مكونة من مجموع مصفوفتي الدقة الخاصتين بالتوزيع المسبق وتوزيع البيانات الخام أى حساب قيمة «مع [مع{د (ا)} + مع {د (ب)}]». جدول رقم ٩ يبين مفردات هذه المصفوفة.

جدول رقم ٩ . مصفوفة التباين المشترك «اللاحق المشروطة «د (ج)»
(جميع أرقام المصفوفة تم ضربها × ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠)

٠٥٦	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٠٧٨	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٠٠٠	٠٧٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٤٣	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٤	٠٠٢	٠٠١	٠٠١	٠٠١	٠٠٠	٠٠٠
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٢	٠٠٣	٠٠٢	٠٠١	٠٠١	٠٠١	٠٠١
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠١	٠٠٢	٠٠٣	٠٠٢	٠٠٢	٠٠٢	٠٠١
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠١	٠٠١	٠٠٢	٠٠٦	٠٠٥	٠٠٥	٠٠٤
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠١	٠٠٨	٠٠٢	٠٠٥	٠١٧	٠١٧	٠١٣
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠١	٠٠٢	٠٠٥	٠١٧	٠٥٢	٠٤١
٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠١	٠٠١	٠٠٤	٠١٣	٠٤١	٠٦٧

لتجديد متجه المتوسطات اللاحق

١) **المعدّلات المسبقة المرجحة**. يجب ترجيح قيمة معدّلات متجه المتوسطات المسبقة د (مـ) بأوزان تساوي درجة الدقة الخاصة ببيانات المعدّلات المسبقة مع [د (ا)] وذلك بضرب مع [د (ا)] × د (مـ).

٢) **المعدّلات الخام المرجحة**. يجب ترجيح قيمة معدّلات الوفاة الخام د (فَ) بأوزان تساوي درجة الدقة الخاصة ببيانات المعدلات الخام مع [د (ب)] وذلك بضرب مع [د (ب)] × د (فَ).

٣) **المجموع المرجح للمعدّلات**. يمكن الوصول إلى المجموع المرجح للمعدّلات بجمع المعدّلات المسبقة المرجحة والمعدّلات الخام المرجحة بدرجات الدقة المناسبة لكل نوع من المعدّلات، أي مع [د (ا)] × د (مـ) + مع [د (ب)] × د (فَ). (انظر جدول رقم ١٠).

جدول رقم ١٠ . خطوات حساب قيمة متجه المتوسطات اللاحق «د (فَ)»

ر	المعدّلات المسبقة المرجحة	المعدّلات الخام المرجحة	المجموع المرجح	المتوسطات اللاحقة د (فَ)
١	٩٨٦,٣٥٥٧	٤٠١٦,٩٤٥	٥٠٠٣,٣٠١	٠,٠٢٧٩٥٦
٢	٧١٩,٧٧٣١	٣٤٥٩,٦٧٧	٤١٧٩,٤٥١	٠,٠٣٢٥٤٢
٣	٧٩٩,٧٤٧٩	٤٣٤٦,٦٨٤	٥١٤٦,٤٣٢	٠,٠٣٦٢٣٤
٤	١٣١٧,٩٧٥٠	٧٣٦٣,٢١٣	٨٦٨١,١٨٨	٠,٠٣٦٨٥٦
٥	-٢٧٨٩,٣٦٠٠	٤٩٥٦٩,٢٨٠	٤٦٧٧٩,٩١٠	٠,٠٣٨٥٤٧
٦	-٧٢٣٤,٤٥٠٠	٥٧٦٧٦,٩٠٠	٥٠٤٤٢,٤٥٠	٠,٠٤٣٠٧٥
٧	١٦٦٥٧,٢٤٠٠	٦٢١٤٦,٤٠٠	٧٨٨٠٣,٦٤٠	٠,٠٥٢٩٥٥
٨	٨٩٧٠,٩١٥٠	٤١٦٧٣,٨٤٠	٥٠٦٤٤,٧٥٠	٠,٠٧٠٠٨٨
٩	-٢٣٢١,٥٦٠٠	٢١٢٧٤,٣٦٠	١٨٩٥٢١,٨٠٠	٠,٠٩٢٧٥٧
١٠	-١٣١٦٥,٠٠٠٠	٨٩٤٤,٢٧٥	-٤٢٢٠,٧٠٠	٠,١٢٠٤٢٣
١١	١٤٤٥٧,٢٨٠٠	١٦٩٧,٠٨٦	١٦١٥٤,٣٦٠	٠,١٥١٢٨٧
المجموع	١٨٣٩٨,٩٣٠٠	٢٦٢١٦٨,٦٠٠	٢٨٠٥٦٧,٦٠٠	٠,٧٠٢٧٢٠

٤) **متجه المتوسطات اللاحقة**. يمكن تحديد مفردات المعدّلات اللاحقة د [فَ (ر)]، ر = ١، ٢، ٠٠٠٠، ن المشروطة بمعلومية قيمة المعدّلات الخام د (فَ) وذلك بضرب [د (ج)] × {مع [د (ا)] × د (مـ) + مع [د (ب)] × د (فَ)} . (انظر جدول رقم ١٠).

تقديـر قيمـة المعدّلات المُسَوّاة

باتباع اقتراح كيميلدورف وجونز [٢] باتخاذ قيمة متجه المتوسطات اللاحق الشرطي بعد إعادته إلى الوحدات الأصلية «فَ» لتكون هي التقدير المقترح لقيم المعدّلات المُسَوّاة يصبح لزامًا تطبيق معكوس دالة التحويلات السابقة على البيانات الخاصة بمتجه المتوسطات اللاحق بالوحدات المُحَوّلة والموضح بالجدول رقم ١٠. جدول رقم ١١ يبين القيمة المقترحة للمعدّلات المُسَوّاة «فَ» (بالوحدات الأصلية).

جدول رقم ١١. معدّلات الوفاة المُسَوّاة

العمر (ر)	معدّلات الوفاة المُسَوّاة «ف (ر)»
١٢,٥	٠,٠٠٠٧٨١
١٧,٥	٠,٠٠١٠٥٩
٢٢,٥	٠,٠٠١٣١٢
٢٧,٥	٠,٠٠١٣٥٨
٣٢,٥	٠,٠٠١٤٨٥
٣٧,٥	٠,٠٠١٨٥٤
٤٢,٥	٠,٠٠٢٨٠٢
٤٧,٥	٠,٠٠٤٩٠٤
٥٢,٥	٠,٠٠٨٥٧٩
٥٧,٥	٠,٠١٤٤٣٢
٦٢,٥	٠,٠٢٢٧١٤
المجموع	٠,٠٦١٢٨

النتـــائج

يمكن تلخيص أهم نتائج هذا البحث فيما يلي :

١) طريقـة تسوية بييز تعطي فرصة أفضل للمُسَوّى لكى يضمن تأثيراً مناسبًا لكل من المعلومات المسبقة عن معدّلات الوفاة سواء من ناحية الارتباط بين معدّلات الوفاة في الأعمار المختلفة أو من ناحية درجة الدقة الموروثة في كل من البيانات المسبقة والبيانات الخام أو من ناحية شكل منحنى الوفاة . . . إلى آخره .

٢) يمكن للمُسَـوّى تحديد مجمـوعـة الأعـمار التي تتميز معدّلات الوفاة عندها بالنعومة المستمرة وتحديد مجموعة الأعمار التي لا تتميز بهذه الصفة عن طريق تحديد المفردات المناسبة بمصفوفة الارتباط «د» التي تفيد في منع زيادة التسوية أكثر من اللازم .

٣) عند معالجة البيانات الخام المصرية تم استخدام عيّنات مكافئة «ن» مختلفة وقيم مختلفة لمعـاملات الارتباط «حـ» وحسبت قيمة المتغيّر العشوائي «كاى تربيع» لقياس جودة التوفيق ومجموع مربعات الفروق الثالثة لقياس مدى التنعيم حتى استقر الرأى على القيم المستخدمة والتي أعطت أفضل النتائج .

٤) لم تحسب قيمة «كاى تربيع» ومجموع مربعات الفروق الثالثة لرفض أو قبول التسوية حيث لم يكن هذا هو الهدف الأصلي من البحث بل إن الهدف من هذا البحث هو تقديم طريقة التسوية البييزية غير المعروفة لعدد كبير من الاكتواريين العرب . وقد تم حساب قيمة هذين المقياسين لإلقاء الضوء على أثر تغيير قيم معلمات التوزيع المسبق . وكـما هو متوقع فقد لوحظ أنه كلما زادت قيمة معامل الارتباط «حـ» أو زادت قيمة العيّنـات المكافئة «ن» زادت قيمة معامل درجة التنعيم للمعدّلات النهائية المُسَوّاة . والعكس فكلما صغـرت قيمـة «حـ» و «ن» قلت درجة التنعيم وزادت درجة توفيق المعدّلات المُسَوّاة بالمقارنة مع المعدّلات الخام . ويبين الجدول رقم **١٢** والجدول رقم **١٣** المعدّلات الخام والمعدّلات المُسَوّاة وقيمة وإشارة الانحرافات بينهما ثم قيمة «كاى تربيع» ومجموع مربعات الفروق الثالثة للمعدّلات المُسّواة مع العلم بأن احتمال أن يأخذ المتغيّر

جدول رقم ١٢ . اختبار جودة تمثيل البيانات المُسَوّاة للبيانات الخام

العمر (ر)	عدد الوفيات الخام	عدد الوفيات المُسَوّاة	الانحرافات	كا٢
١٢,٥	٢٧	٢٩,١٨	٢,١٨	٠,١٦٢٤٥٧
١٧,٥	٢٨	٢٨,٢٧	,٢٧	٠,٠٠٢٦٤٦
٢٢,٥	٤٠	٣٨,٧٢	٢٨,١٠-	٠,٠٤١٩٨٩
٢٧,٥	٦٩	٦٦,٦٥	٢,٣٥-	٠,٠٨٣١٦٦
٣٢,٥	٦٦	٤٨٩,١٩	٢٣,١٩	١,٠٩٩٦٩
٣٧,٥	٦٤٤	٥٩٨,٢٦	٤٥,٧٤-	٣,٤٩٧٨٥٢
٤٢,٥	٨٤٧	٧٩٧,٦٥	٤٩,٣٥-	٣,٠٥٣٠٦٩
٤٧,٥	٧٢٨	٧٣٠,٠٣	٢,٠٣	٠,٠٠٥٦٥١
٥٢,٥	٤٨١	٥٠٣,١٦	٢٢,١٦	٠,٩٧٥٥٦٥
٥٧,٥	٢٦٢	٢٧٤,١٥	١٢,١٥	٠,٥٣٨١٧٦
٦٢,٥	٦٤	٦٣,٣٩	٠,٦١-	٠,٠٠٥٧٩٦
المجموع	٣٦٥٦	٣٦١٨,٦٥	٣٧,٣٥-	٩,٤٦٦٠٥٨

جدول رقم ١٣ . اختبار مدى نعومة البيانات المُسَوّاة

العمر (ر)	معدّلات الوفاة المُسَوّاة	الفروق الأولى	الفروق الثانية	الفروق الثالثة	مربع الفروق الثالثة
١٢,٥	٠,٠٠٠٧٨١	٠,٠٠٠٢٧٧	٠,٠٠٠٢٤-	٠,٠٠٠١٨٠-	٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٣
١٧,٥	٠,٠٠١٠٥٩	٠,٠٠٠٢٥٤	٠,٠٠٠٢١٠-	٠,٠٠٠٢٩٠	٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٨
٢٢,٥	٠,٠٠١٣١٢	٠,٠٠٠٠٤٥	٠,٠٠٠٠٨٢	٠,٠٠٠١٦٠	٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٣
٢٧,٥	٠,٠٠١٣٥٨	٠,٠٠٠١٢٧	٠,٠٠٠٢٤٢	٠,٠٠٠٣٣٦	٠,٠٠٠٠٠٠٠١٢
٣٢,٥	٠,٠٠١٤٨٥	٠,٠٠٠٣٦٩	٠,٠٠٠٥٧٨	٠,٠٠٠٥٧٧	٠,٠٠٠٠٠٠٠٣٤

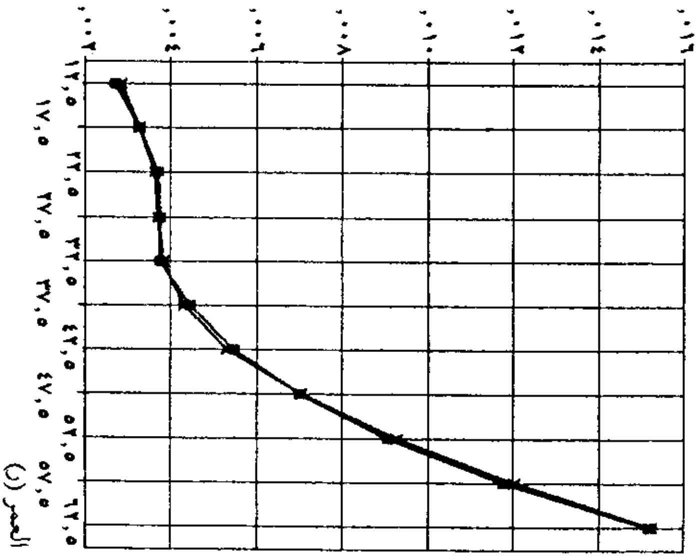
تابع ـ جدول رقم ١٣. اختبار مدى نعومة البيانات المُسَوّاة

العمر (ر)	معدّلات الوفاة المُسَوّاة	الفروق الأولى	الفروق الثانية	الفروق الثالثة	مربع الفروق الثالثة
٣٧,٥	٠,٠٠١٨٥٤	٠,٠٠٩٤٧٠	٠,٠٠١١٥٥	٠,٠٠٠٤١٧	٠,٠٠٠٠٠٠١٨
٤٢,٥	٠,٠٠٢٨٠٢	٠,٠٠٢١٠٣	٠,٠٠١٥٧٢	٠,٠٠٠٦٠٥	٠,٠٠٠٠٠٠٣٧
٤٧,٥	٠,٠٠٤٩٠٤	٠,٠٠٣٦٧٥	٠,٠٠٢١٧٨	٠,٠٠٠٢٥١	٠,٠٠٠٠٠٠٦٣
٥٢,٥	٠,٠٠٨٥٧٩	٠,٠٠٥٨٥٣	٠,٠٠٢٤٢٩		
٥٧,٥	٠,٠١٤٤٣٢	٠,٠٠٨٢٨٢			
٦٢,٥	٠,٠٢٢٧١٤				
المجموع	٠,٠٦١٢٨٠	٠,٠٢١٩٣٢	٠,٠٠٨٠٠٥	٠,٠٠٢٤٥٣	٠,٠٠٠٠٠١٧٨

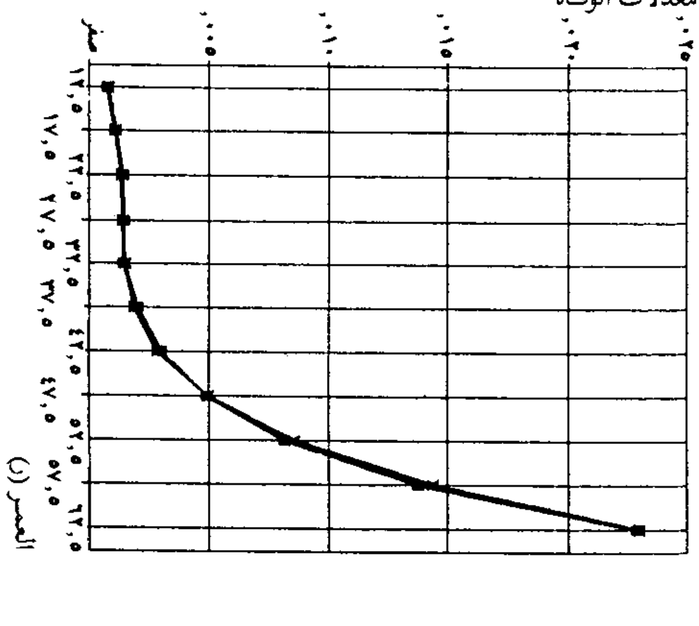
العشوائي «كاى تربيع بـ ١٠ درجات حرية» القيمة المذكورة «٤٦٦٠٥٨ , ٩» أو أى قيمة أكبر من ذلك هو ٤٨,٩٪. ومن الواضح قرب هذا الاحتمال من النصف كما يجب أن يكون وفقًا لتوصية بنيامين وبولارد [١٣]. كذلك يمكن النظر إلى الأشكال من رقم ١١ إلى رقم ٢٠ للتأكد من جودة تمثيل البيانات المُسَوّاة للبيانات الخام وعلاقتها بالمعدّلات المسبقة.

٥) بلغت قيمة مقياس الدقة النسبي ق = جذ [Π [ن (ر) ÷ ض (ر)] ÷ { ١ـ مر (٩٤٢٨٠٩ , ٠) } ا س ٦] = ٤٦٪ وبذا فقد أعطيت مصداقية للبيانات الخام المصرية تزيد قليلاً على ضعف درجة المصداقية التي أعطيت للبيانات الإنجليزية الموجودة في جدول ٤٩ـ١٩٥١م في تمثيلها للخبرة المصرية.

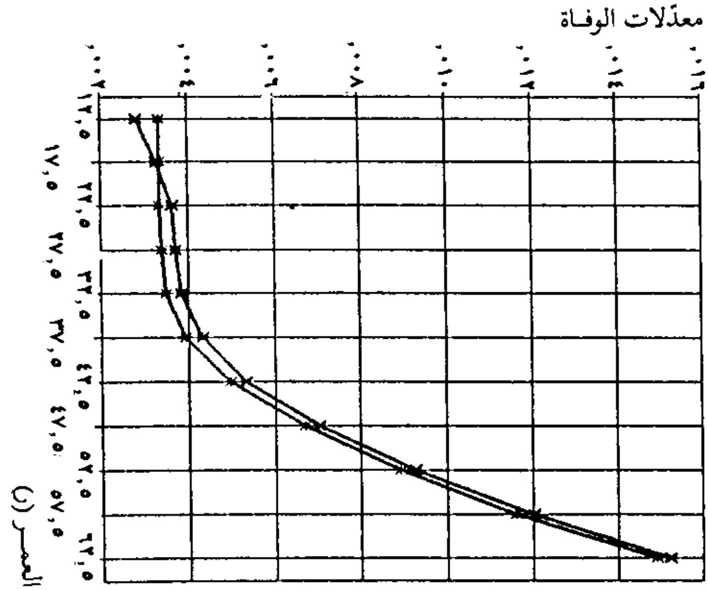
٦) أمكن قياس التحسن في درجة دقة البيانات الخاصة بالتوزيع اللاحق المشروط بمعلومية البيانات الخام بالمقارنة بدرجة دقة البيانات الخاصة بالتوزيع المسبق وذلك بقسمة قيمة محدد مصفوفة الدقة الخاصة بكل من التوزيعين اللاحق المشروط والمسبق حيث بلغت نسبة التحسن هذه ٥١٨٪ حسبت كالآتي:



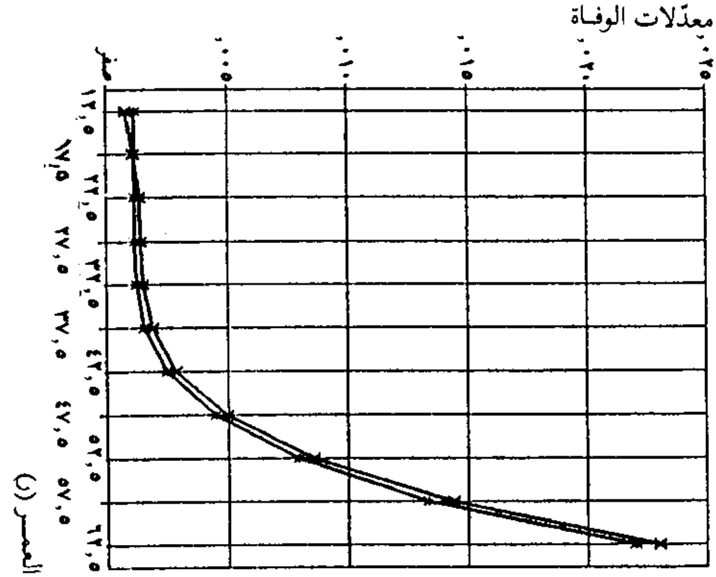
شكل رقم ١٢ المعدّلات الخام (■) والمُسوّاة
(بالوحدات المحوّلة)



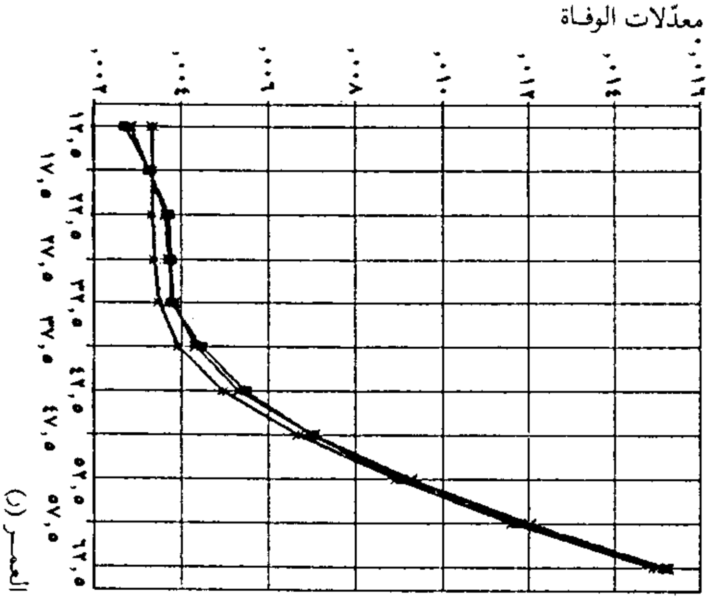
شكل رقم ١١ . المعدّلات الخام (■) والمُسوّاة
(بالوحدات الأصلية)



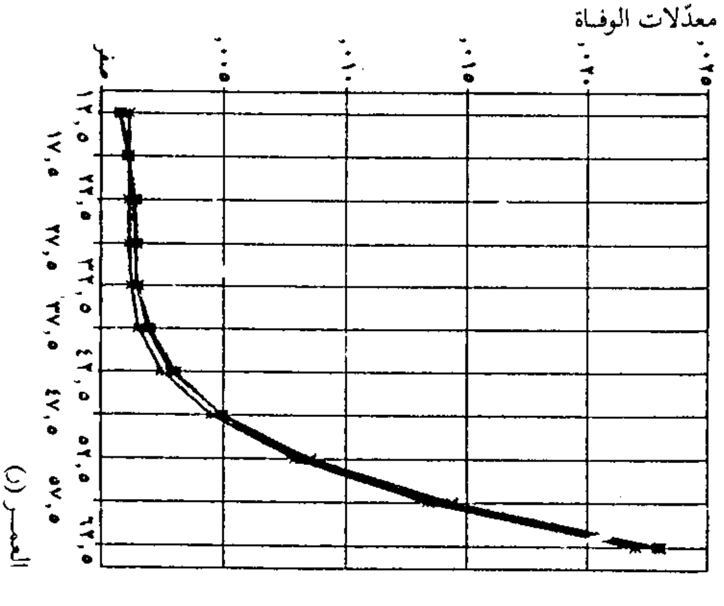
شكل رقم ١٤ . المعدّلات الإنجليزية ٤٩ وللمرأة (×)
(بالوحدات المحوّلة)



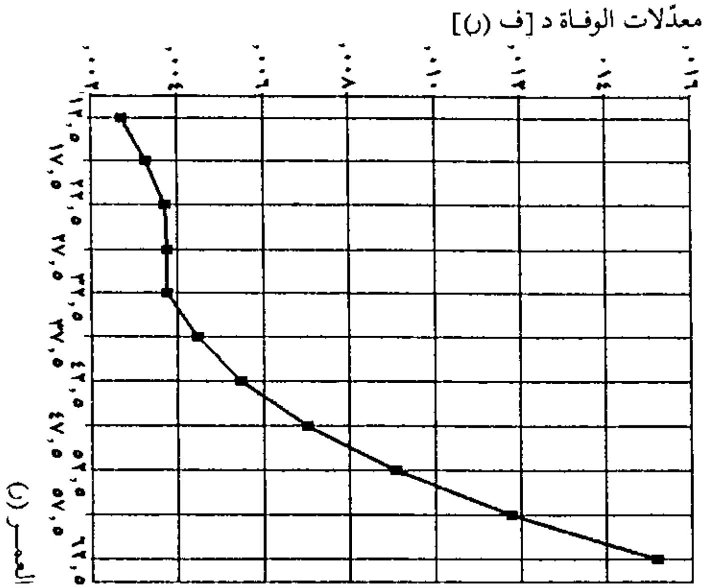
شكل رقم ١٣ . المعدّلات الإنجليزية ٤٩ وللمرأة (×)
(بالوحدات الأصلية)



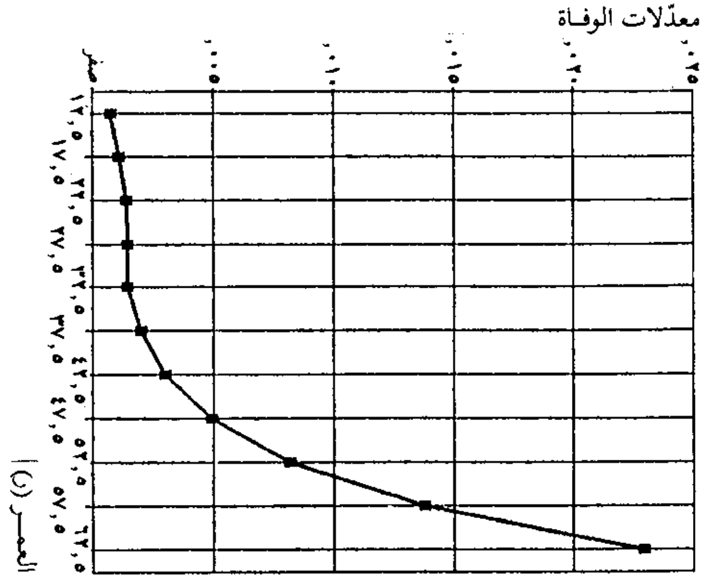
شكل رقم ١٦ . المعدلات الخام والإنجليزية ٤٩ (*)
والمسوّاة (بالوحدات المحوّلة)



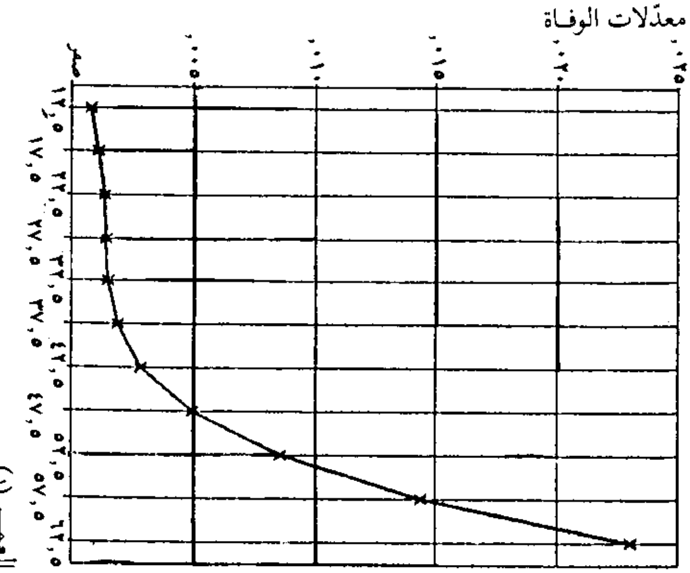
شكل رقم ١٥ المعدلات الخام والإنجليزية ٤٩ (*)
والمسوّاة (بالوحدات الأصلية)



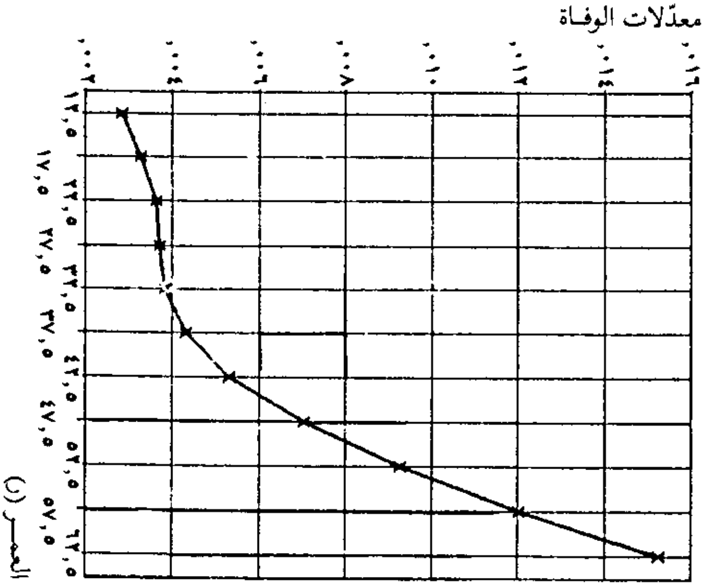
شكل رقم ١٨ . المعدّلات الخام
(بالوحدات المحوّلة)



شكل رقم ١٧ . المعدّلات الخام
(بالوحدات الأصلية)



شكل رقم ١٩. المعدّلات المسوّاة
(بالوحدات الأصلية)



شكل رقم ٢٠. المعدّلات المسوّاة
(بالوحدات المحوّلة)

= جذ [مح مع { د (ج) } ÷ مح مع { د (ا) }]

= جذ [مح [مع { د (ا)} + مع { د (ب) }] ÷ مح مع { د (ا) }]

التوصيـــــات

يمكن الخلوص من هذا البحث إلى التوصيات الآتية.

١) تحويل المُعدّلات الخام ومعلمات التوزيع المسبق باستخدام دالّة معكوس جيب الزاوية (arc-sine function) قبل تنفيذ إجراءات تسوية معدّلات الوفاة حيث إننا لن نحتاج عندئذ إلى تقدير قيمة التباينات الفردية لكل متغيّر في التوزيع المسبق. بل إننا نستطيع بدلاً من ذلك أن نحدد أحجام عيّنات مكافئة لدرجة الدقة في المعدّلات المسبقة وذلك بدراستنا لكيفية إنشائها في الماضي وبدلالة قيمة المقادير المُعَرّضة للخطر في الماضي وهذا أسهل بكثير من محاولة تقدير قيمة التباينات الفردية لكل متغيّر. بالإضافة لهذه الميزة فإن استخدام تحويلات معكوس جيب الزاوية سيحسن في درجة التقريب للتوزيعات الطبيعية.

٢) ضرورة النظر للبيانات بدقة كافية لتجنب الاختيار غير المناسب للتوزيع الاحتمالي المسبق. أيضًا يجب استعمال المحددات الخاصة بمصفوفات دقة كل مصدر من مصادر البيانات سواءً التوزيع المسبق أو التوزيع الخاص ببيانات العيّنة لتحديد مقاييس دقة مدخلات التسوية بطريقة كمية علمية.

٣) تطوير هذه الطريقة الحديثة من طرق التسوية ومحاولة المضي بها قدمًا ووضع أسس علمية موضوعية لتحديد كل من المعلمات المسبقة ثم اختيار الأسس المناسبة لقياس أداء هذه الطريقة.

المـــراجـــع

[١] Elphinstone, M. D. W. "Summation and Some Other Methods of Graduation: The Foundation of Theory." *TFA*, XX (1951), 15.

[٢] Kimeldorf, G. S. and Jones, D. A. "Bayesian Graduation." *TSA*, XIX (1967), 66.

[٣] Jones, D. A. "Bayesian Statistics." *TSA*, XVII (1965), 33.

[٤] Whittaker, E. T. and Robinson, G. *The Calculus of Observations*. 4th Ed. London and Glasgow: Blackie & Sons, Ltd., 1944.

[٥] King, G. Discussion of "The Graphic Method of Adjusting Mortality Tables." by T. B. Sprguc, *JIA*, XXVI (1887), 114.

[٦] Kimeldorf, G. A. "Application of Bayesian Statistics to Actuarial Graduation." An Arbor: University of Michigan, *Dissertation Abstracts*, Vol. XXVII (1966).

[٧] Anscombe, F. J. "The Transformation of Poisson, Binomial and Negative-Binomial Data." *Biometrika*, XXXV (1948), 246.

[٨] Novick, M.; Lewis, C. and Jackson, P. "The Estimation of Proportion in Groups." *Psychometrika*, XXXVIII (1973), 19.

[٩] Shur, W. "Discussion of Margolin's Credibility for Group Insurance Claims Experience." *TSA*, XXIII (1971), 240.

[١٠] Myers, R. J. "United States Life Tables for 1969-1971." *TSA*, XXVIII (1976), 93.

[١١] Cramer, H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press, 1946.

[١٢] المنصوري، م. ت. ومرجان، ا. م. «تسوية معدلات الوفاة باستخدام الطرق اللامعلمية.» مجلة *معهد الإحصاء والبحوث بجامعة القاهرة* (١٩٨٧).

[١٣] Benjamin, B. and Pollard, J. *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics*. London: Heinemann, 1980.

Bayesian Graduation Method

Ibrahim M. Morgan
Assistant Prof., Public Administration Inst., Riyadh, Saudi Arabia
(Received 29/7/1410; Accepted for Publication 22/5/1411)

Abstract. Graduation of mortality tables has been modeled as a statistical estimation problem of a large set of mortality rates simultaneously taking into consideration the well known rates characteristics which may or may not be included in the observations as prior information. The Bayesian graduation method is introduced and is applied on actual Egyptian data.

This graduation method gives the graduator the opportunity to guarantee reasonable effect of his prior information about the mortality rates from all aspects.

We have built the statistical model as follows:

* Data Distribution: is the classical binomial model with the mutual independent assumption. Applying the Central Limit Theorem leads to the multinormal distribution.

* Prior Distribution: according to the conjugate distribution technique, the prior distribution will be multinormal distribution with parameters:

a) **Mean vector:** the ultimate mortality rates of the English Tables 49-1951.

b) **Variance-covariance matrix:** has been simplified by application of the arc sine transformation on the square root of the observations and the prior distribution.

* Determinants of the variance-covariance matrices of the data distribution: the prior distribution and the posterior distribution have been used to measure the precision of the inputs and outputs of the graduation process.

* Bayesian derivation of the posterior distribution has been established. Its uses in determining the graduated rates. That suit specified purposes, has been shown.