الملك سعود
العلوم الادارية
كز البحوث

نظرية الاحتمالات لطلاب العلوم الإدارية

الجزء الاول

الحوادث العشوائية

اعداد

الدكتور محمد عبدالحميد نطفجي
قسم الاساليب الكمية

الرياض
١٤٠٣هـ - ١٩٨٣م

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة العربية السعودية
جامعة الملك سعود
كلية العلوم الإدارية
مركز البحوث

نظرية الاحتمالات لطلاب العلوم الإدارية

الجزء الأول
الحوادث العشوائية

اعداد

الدكتور محمد عبدالحميد نطفجي
قسم الأساليب الكمية

الرياض
١٤٠٣هـ - ١٩٨٣م
مطابع جامعة الملك سعود

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

لقد ظهرت نظرية الاحتمالات في منتصف القرن السابع عشر ، وأصبحت في العقود الاخيرة من القرن الحالي أحد فروع علم الرياضيات التي تتقدم بخطى سريعة ، وفتحت بنتائجها النظرية الباب امام استخدام طرقها المختلفة في التطبيقات العملية التي تصادف عددا كبيرا من العاملين في مختلف الميادين ، كالقادة العسكريين ورجال الاعمال والمديرين وغيرهم . وبالاضافة الى التوسع في استخدامها في فروع علوم كثيرة فانها تعتبر القاعدة الاساسية التي ترتكز عليها معظم الاساليب الاحصائية .

ونظرا لاهمية هذا الموضوع بالنسبة لطلبة العلوم الاداريه والباحثين فاننا نقدم هذا الجزء الاول من سلسلة سنقوم ـ انشاء الله ـ بنشرها تباعا اخذين بعين الاعتبار حاجة الطلاب ومناهج مقررات الكليه . لذلك سوف تكون هذه المؤلفات متميزة بترتيب المواضيع وطريقة العرض بالاضافة الى الاكثار من المسائل المحلولة.

ويطيب لي بهذه المناسبة أن اتقدم بالشكر الجزيل لسعادة الدكتور عبدالله القباع ، مدير مركز البحوث ، لما نلقاه منه من مساعدة وتشجيع .

والله الموفق

رجب ١٤٠٣هـ
ابريل ١٩٨٣ م

محمد عبدالحميد نطفجي

الفصل الاول

تمهيد

١ – مقدمة ·

ان الحوادث او الظواهر التي نشاهدها يمكن تصنيفها في ثلاث فئات :

- الحوادث الحتمية (او اليقينية) ؛
- الحوادث المستحيلة ؛
- الحوادث العشوائية ·

الحادث الحتمي هوالحادث الذى يقع حتما اذا نفذت مجموعة معينة من الشروط S ·

مثال: اذا وضعنا في وعاء ماء ، ففي الضغط الجوي الطبيعي ودرجة حرارة ٢٠ مئوية ، الحادث أن " الماء هو مائع " هو حادث حتمي · في هذا الحادث الضغط الجوى وحرارة الماء هي مجموعة الشروط S ·

الحادث المستحيل هو الحادث الذى لن يقع اذا نفذت مجموعة الشروط S ·

مثال: الحادث " وجود الماء في وضع التجمد " لن يحدث اذا نفذت مجموعة شروط المثال السابق ·

أما الحادث العشوائي فهو الحادث الذى يمكن أن يقع أولا يقع عند تنفيذ مجموعة الشروط S ·

مثال : عند رمي قطعة نقود يمكن ان تقع بحيث يكون الوجه العلوى اما الكتابة أو الشعار · لهذا فان الحادث " ظهور الشعار بعد رمي قطعة النقود " هو حادث عشوائي ·

كل حادث عشوائي هو نتيجة تفاعل اسباب متعددة· ففي المثال السابق : القوة التي تم بها رمي قطعة النقود ، شكل القطعة ، الهواء ، الحرارة ، واسباب اخرى كثيره · ليس بالامكان دراسة تأثير جميع هذه الاسباب على النتيجة ، لان عددها كبير ولان قوانين تأثيرها غير معلومة ·

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

لقد ظهرت نظرية الاحتمالات في منتصف القرن السابع عشر ، وأصبحت في العقود الاخيرة من القرن الحالي أحد فروع علم الرياضيات التي تتقدم بخطى سريعة ، وفتحت بنتائجها النظرية الباب امام استخدام طرقها المختلفة في التطبيقات العملية التي تصادف عددا كبيرا من العاملين في مختلف الميادين ، كالقادة العسكريين ورجال الاعمال والمديرين وغيرهم . وبالاضافة الى التوسع في استخدامها في فروع علوم كثيرة فانها تعتبر القاعدة الاساسية التي ترتكز عليها معظم الاساليب الاحصائية .

ونظرا لاهمية هذا الموضوع بالنسبة لطلبة العلوم الاداريه والباحثين فاننا نقدم هذا الجزء الاول من سلسلة سنقوم ـ انشاء الله ـ بنشرها تباعا اخذين بعين الاعتبار حاجة الطلاب ومناهج مقررات الكليه . لذلك سوف تكون هذه المؤلفات متميزة بترتيب المواضيع وطريقة العرض بالاضافة الى الاكثار من المسائل المحلولة .

ويطيب لي بهذه المناسبة أن اتقدم بالشكر الجزيل لسعادة الدكتور عبدالله القباع ، مدير مركز البحوث ، لما نلقاه منه من مساعدة وتشجيع .

والله الموفق

رجب ١٤٠٣هـ
ابريل ١٩٨٣ م

محمد عبدالحميد نطفجي

الفصل الاول

تمهيد

١ – مقدمة :

ان الحوادث او الظواهر التي نشاهدها يمكن تصنيفها في ثلاث فئات :

- الحوادث الحتمية (او اليقينية) ؛
- الحوادث المستحيلة ؛
- الحوادث العشوائية .

الحادث الحتمي هوالحادث الذى يقع حتما اذا نفذت مجموعة معينة من الشروط S .

مثال: اذا وضعنا في وعاء ماء ، ففي الضغط الجوي الطبيعي ودرجة حرارة ٢٠ مئوية ، الحادث أن " الماء هو مائع " هو حادث حتمي . في هذا الحادث الضغط الجوى وحرارة الماء هي مجموعة الشروط S .

الحادث المستحيل هو الحادث الذى لن يقع اذا نفذت مجموعة الشروط S .

مثال: الحادث " وجود الماء في وضع التجمد " لن يحدث اذا نفذت مجموعة شروط المثال السابق .

أما الحادث العشوائي فهو الحادث الذى يمكن أن يقع أولا يقع عند تنفيذ مجموعة الشروط S .

مثال : عند رمي قطعة نقود يمكن ان تقع بحيث يكون الوجه العلوى اما الكتابة أو الشعار . لهذا فان الحادث " ظهور الشعار بعد رمي قطعة النقود " هو حادث عشوائي .

كل حادث عشوائي هو نتيجة تفاعل اسباب متعددة. ففي المثال السابق : القوة التي تم بها رمي قطعة النقود ، شكل القطعة ، الهواء ، الحرارة ، واسباب اخرى كثيره . ليس بالامكان دراسة تأثير جميع هذه الاسباب على النتيجة ، لان عددها كبير ولان قوانين تأثيرها غير معلومة.

لهذا فان نظرية الاحتمالات لاتهدف الى التنبوء بوقوع الحادث الوحيد (أو الفريد) أو عدم وقوعه ، لانها ببساطة لاتستطيع فعل ذلك ، ولكن الموضوع يمكن تصوره بشكل اخر . فاذا تفحصنا حوادث عشوائية يشاهد وقوعها بشكل متكرر عند تنفيذ أو تطبيق نفس مجموعة الشروط S (أى اذا كان الحديث يجرى عن وقوع عدد كبير من الحوادث العشوائية من نوع واحد) نجد ان عددا كبيرا بشكل كاف من نوع واحد من الحوادث العشوائية يتبع في وقوعه قانونا محددا، وبشكل ادق قانونا احتماليا. نظرية الاحتمالات تهتم بتعيين أو تحديد هذا القانون .

اذن ، فان موضوع نظرية الاحتمالات هو دراسة القوانين الاحتمالية للحوادث العشوائيه ، كثيرة الوقوع وذات النوع الواحد .

معرفة القوانين الاحتمالية التي تتبعها الحوادث العشوائية كثيرة الوقوع تسمح لنا بالتنبوء بحدوثها. فمثلا بالرغم من انه لايمكن تحديد بشكل مسبق نتيجة رمي قطعة نقود واحدة، الا أنه يمكن التنبوء — وبخطأ ليس كبيرا — بعدد مرات ظهور الشعار اذا رميت قطعة النقود عددا كبيرا بشكل كاف من المرات، حيث ترمى قطعة النقود هذه دوما في نفس الشروط .

٢ — مضروب n.

لنأخذ مجموعة الحروف التالية : a , b, c ولنرتبها بجميع الاشكال الممكنة :

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba$$

نلاحظ ان الترتيبات الممكنة هي ستة . ولكن اذا كان عدد الحروف اكثر فانه من الصعوبة كتابة جميع الترتيبات الممكنة دون معرفة عددها مسبقا . لذلك لابد من قانون يعطينا عدد الترتيبات الممكنة.

اذا كان لدينا n عنصرا ، فان عدد مرات الترتيبات الممكنة يساوى $n!$ (n عاملي)

حيث :

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.\ 1$$

ومن المعلوم ان : $0! = 1$

في المثال السابق : $n = 3$

ومنه فان عدد الترتيبات الممكنة : $n! = 3! = 3.2.1 = 6$

مثال : ماهو عدد الترتيبات الممكنة لخمس علب حليب مختلفة على رف واحد ؟

$$n! = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

٣ - التباديل .

اذا كان لدينا n عنصرا وأخذنا منها r عنصرا عددا من المرات (بحيث تؤخذ جميع هذه العناصر) ورتبناها مع الاخذ بعين الاعتبار نظام الترتيب فاننا نسمي ذلك تبديلا . عدد هذه التباديل نرمز له ب (P_n^r) ونحسبه بالقانون التالي :

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : لدينا مجموعة الحروف التالية : a, b, c أخذنا من هذه المجموعة حرفين عددا من المرات بحيث تؤخذ جميع هذه الحروف ، فان كل ترتيب من الترتيبات التالية يسمى تبديلا :

ab , ac , bc , ba , ca, cb

وعندما نقول ان نظام الترتيب يؤخذ بعين الاعتبار ، فهذا يعني أن ab تختلف عن ba وكذلك bc تختلف عن cb . . .

من المثال المطروح نلاحظ أن $n=3$ و $r = 2$ اذن عدد التباديل :

$$P_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

مثال : لدينا مجموعة الارقام التالية : 1,2,3,4 . ماهو عدد التباديل الممكنه اذا كان كل تبديل يتألف من رقمين ؟

$$P_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43

٤ــ التوافيق .

اذا كان لدينا n عنصرا وأخذنا منها r عنصرا عددا من المرات (بحيث تؤخذ جميع هذه العناصر) ورتبناها دون الاخذ بعين الاعتبار نظام الترتيب، فاننا نسمي ذلك توفيقا . عدد هذه التوافيق نرمز له ب (C_n^r) ونحسبه بالقانون التالي :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال : لدينا مجموعة الحروف التالية : a,b,c أخذنا من هذه المجموعة حرفين عددا من المرات ، بحيث تؤخذ جميع الحروف ، فان كل ترتيب من الترتيبات التالية يسمى توفيقا : ab, ac, bc .

عندما نقول أن نظام الترتيب لايؤخذ بعين الاعتبار ، فهذا يعني أنه لافرق بين ba و ab وكذلك لافرق بين ac و ca . . . .

عدد التوافيق الممكنة :

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

مثال : ترشح سبعة مرشحين لاحدى اللجان ، ويجب انتخاب ثلاثة منهم لهذه اللجنة ، ماهو عدد التوافيق الممكنة ؟

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$$

تمارين محلولة

١) لديناخمس كرات مختلفة الالوان ، بكم طريقة نستطيع ترتيبها في صف واحد؟
عدد الترتيبات :

$$n! = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

٢) ماهو عدد التباديل التي يمكن الحصول عليها من جلوس عشرةرجال فياربعة مقاعد فقط؟

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

٣) بكمطريقةيمكن ان تتشكل لجنة تتألف من خمسة أشخاص وذلك اذا كان عدد المرشحين تسعة ؟

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = 126$$

٤) كم كلمة نستطيع ان نشكل منسبعة حروف ساكنة وخمسة صوتية ، بحيث تكون كل كلمة مؤلفة من اربعة حروف ساكنة مختلفة وثلاثة صوتية مختلفة ؟

(ملاحظة : ليس من الضروري أنيكون للكلمات أى معنى).

— عدد التوافيق للحروف الساكنة = C_7^4

— عدد التوافيق للحروف الصوتية = C_5^3

— من هذه التوافيق نحصل على سبعة حروف مختلفة (أربعة ساكنة وثلاثة صوتية)

هذه الحروف يمكن ترتيبها ب $n!$ ترتيبا مختلفا ، ومنه :

عدد الكلمات = $C_7^4 \,.\, C_5^3 \,.\, 7!$

$$= 35.10.5040 = 1764000$$

الفصل الثاني
المفاهيم الاساسيةلنظرية الاحتمالات

١- التجربة والحادث ٠

لقد عرفنا الحادث العشوائي بأنه ذلك الحادث الذى اما ان يقع او لايقع عند تنفيذ مجموعة شروط معينة S . في الفقرات التالية عوضا عن ان نقول "تطبيق او تنفيذ مجموعة الشروط S " فاننا سنقول بشكل مختصر " اجريت تجربة " وعليه فاننا سنعتبر الحادث نتيجة للتجربة ٠

مثال :

يوجد في صندوق عدد من الكرات الملونة ٠ سحبنا بشكل عشوائي كرة واحدة . سحب كرة من الصندوق هو تجربه ٠ ظهور كرة من لون معين هو حادث ٠

مثال :

رامي اسهم يرمي علىمرمى مقسم الى أربعة أقسام. الرمي هو تجربة٠ وقوع السهم في قسم معين من المرمى هو حادث ٠

٢- الحوادث المتنافية ٠

نقول عن الحوادث بأنها متنافية اذا كان وقوع واحد منها ينفي وقوع الحوادث الممكنة الاخرى في نفس التجربة (أو في التجربة الواحدة) ٠

مثال :

عند رمي قطعة نقود فان ظهور الشعار ينفي ظهور الكتابة.لذلك فان الحادثين " ظهور الشعار " و " ظهور الكتابة " هما حادثان متنافيان٠

الحوادث تسمى حوادث وحيدة ممكنة اذا كان بنتيجة التجربة وقوع حادث واحد وواحد فقط من هذه الحوادث هو امر حتمي.وبدهي أن الحوادث الوحيدة الممكنة هي حوادث متنافية ٠

مثال :

لدى احد الاشخاص بطاقتان من بطاقات الهدايا المتعددة التي تقدمها بعض الشركات للدعاية ، فمن المؤكد وقوع حادث واحد وواحد فقط من الحوادث التالية :

– ستفوز البطاقة الاولى بهدية ولن تفوز الثانية ؛

– ستفوز البطاقتـــان ؛

– لن تفوز البطاقة الاولى وتفوز الثانية ؛

– لن تفوز البطاقتان.

٣– التعريف التقليدي للاحتمال ٠

ان تعريف الاحتمال هو واحد من المفاهيم الاساسية لنظرية الاحتمالات ، ويوجد له عدة تعاريف ٠ سنذكر هنا التعريف المسمى بالتقليدي (الكلاسيكي) وبعد قليل سنشير الى نواحي الضعف في هذا التعريف وبعد ذلك سنعطي تعريفا احصائيا للاحتمال ٠

لنفرض أنه لدينا صندوق فيه ٦ كرات متساوية في الحجم والملمس ، و الوانها كالتالي : ٢ حمراء ، ٣ زرقاء ، ١ بيضاء ٠ بد هي ان امكانية سحب كره ملونـــة (غيربيضاء) هي أكبر من امكانية سحب كرة بيضاء ٠ والان يمكن طرح السؤال التالي: هل نستطيع تحديد هذه الامكانية بشكل عددي ؟ والجواب هو بالايجاب والعدد المطلوب تحديده يسمى احتمال وقوع الحادث ٠ اذن الاحتمال هو عدد يصف امكانيـــة وقوع حادث ما ٠

في المثال السابق لنحاول تحديد امكانية سحب كرة ملونة ٠ سنعتبر سحب كرة ملونة هو وقوع الحادث A . كل نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة نسميها حالة ممكنة لنرمز للحالات الممكنة ب :

$$E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad E_5 \quad E_6$$

حيث :

– ظهور كرة بيضاء E_1

– ظهور كرة حمراء E_2, E_3

– ظهور كرة زرقاء E_4, E_5, E_6

من السهل ملاحظة أن هذهالحالات الممكنة هي حالات وحيدة ممكنة (حتما سيسحب كرة) ومتكافئة (سحب الكرة هو سحب عشوائي . الكرات متساوية في الحجم والملمس ومخلوطة جيدا ، وبالتالي لكل كرة فرصة متساوية في السحب) .

تلك الحالات الممكنة التي بتحققها يقع الحادث الذى نهتم به نسميها " الحالات المواتية " . في مثالنا الحالات المواتية للحادث A (وهو سحب كرة ملونة) هي خمس حالات :

$$E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad E_5 \quad E_6$$

نسبة عدد الحالات المواتية للحادث A الى عدد الحالات الممكنة نسميه احتمال الحادث A ونرمز له بـ P(A). في المثال الحالي عدد الحالات الممكنة ٦ منهم ٥ حالات مواتية للحادث A وبالتاليفان احتمال سحب كرة ملونة هو :

$$P(A) = \frac{5}{6}$$

العدد الذى توصلنا اليه ($\frac{5}{6}$) يعطي وصفا عدديا لامكانية سحب كرة ملونة .

بعد هذه المقدمة يمكن اعطاء التعريف التالي للاحتمال :
احتمال الحادث A هو نسبة عدد الحالات المواتيةلهذا الحادث الى عدد الحالات الممكنة للتجربة والتي هي حالات وحيدة ممكنة ومتكافئة . وبناء على ذلك ، فان احتمال الحادث A يحدد كمايلي :

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

حيث :

m — عدد الحالات المواتية للحادث A ؛

n — عدد الحالات الممكنة للتجربة . (وهنايفترض أن هذه الحالات الممكنة هي الوحيدة الممكنة ومتكافئة) .

٤ — خصائص الاحتمال ٠

من تعريف الاحتمال يمكن استخلاص الخصائص التالية :

أ) احتمال الحادث الاكيد يساوى الواحد ٠

اذا كان الحادث اكيدا فان كل حالة من الحالات الممكنة هي حالة مواتية للحادث ، وبالتالي فان : $m = n$

ومنه :
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

ب) احتمال الحادث المستحيل يساوى الصفر .

اذا كان الحادث غير ممكن ، فان اى حالة من الحالات الممكنة هي حالة غير مواتية للحادث ، وبالتالي فان : $m = 0$

ومنه :
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

جـ) احتمال الحادث العشوائي هو عدد موجب وينحصر بين الصفر والواحد ٠

ان الحالات المواتية للحادث العشوائي يمكن ان تكون :

$$0 < m < n$$

بقسمة هذه المتراجحة على (n) نحصل على :

$$0 < \frac{m}{n} < 1$$

وبالتالي :

$$0 < P(A) < 1$$

٥ — التكرار النسبي.استقرار التكرار النسبي ٠

التكرار النسبي يُتبع الى المفاهيم الاساسية لنظرية الاحتمالات ، ويمكن تعريفه كمايلي :

التكرار النسبي لحادث ماهو نسبة عدد التجارب التي يقع فيها الحادث المواتي الى العدد الكلي للتجارب الجارية ٠ ومنه فان التكرار النسبي للحادث A يتحدد على الشكل التالي :

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

حيث :

m — عدد مرات وقوع الحادث A ؛

n — عدد التجارب الكلي •

من مقارنة الاحتمال والتكرار النسبي نلاحظ ان تحديد الاحتمال لايتطلب القيام فعليا باجراء التجارب،اما لتحديد التكرار النسبي فانه يفترض القيام باجراء التجارب عمليا •بتعبير اخر ، الاحتمال يحسب قبل التجربة ، اما التكرار النسبي فانه يحسب بعد التجربة •

مثال :

قام احد الرماة برمي سهم على هدف ٢٤ مرة،اصاب الرامي الهدف ١٩ مرة فقط • التكرار النسبي لاصابة الهدف هو :

$$W(A) = \frac{19}{24}$$

الملاحظة أظهرت انه اذا اجريت محاولات في ظروف واحدة ، وفي كل محاولة من هذه المحاولات كان عدد التجارب كبيرا بما فيه الكفاية ، فان التكرار النسبي يتمتع بخاصة الاستقرار • هذه الخاصة تعني أ نه في المحاولات المختلفة التكرار النسبي يتغير تغيرا صغيرا (كلما كان عدد التجارب كبيرا كلما كان هذا التغير صغيرا) ويتذبذب حول عدد ثابت • هذا العدد الثابت هو احتمال وقوع الحادث •

وبهذا فاذا كان بطريق المحاولة قد حدد التكرار النسبي فان العدد الذى حصلنا عليه يمكن اعتماده كقيمة تقريبية للاحتمال •

العلاقة بين الاحتمال والتكرار النسبي سنبحثها بالفقرة التالية بشكل أكثر دقة • اما الان لنعط مثالا على خاصة استقرار التكرار النسبي •

مثال :

لقد اجريت ثلاث محاولات لرمي قطعة نقود وكانت النتائج كما هو مبين في الجدول التالي :

المحاولة	عدد الرميات	عدد مرات ظهور الشعار	التكرار النسبي
1	4040	2048	0.5069
2	12000	6019	0.5016
3	24000	12012	0.5005

من الجدول نلاحظ ان التكرار النسبي ينحرف عن العدد 0.5 وكلما كـان عدد الرميات اكبر كلما كان الانحراف اقل. فمثلا عند 4040 رمية الانحـراف يساوى 0.0069 و عند 24000 رمية فان الانحراف هو فقط 0.0005 لنأخذ بعين الاعتبار أن احتمال ظهور الشعار عند رمي قطعة نقود هو 0.5 وهذا يقنعنا مجددا ان التكرار النسبي يتذبذب حول الاحتمال .

٦ـ محدودية التعريف التقليدى للاحتمال . الاحتمال الاحصائي .

التعريف التقليدى للاحتمال يعتبر أن عدد الحالات الممكنة للتجربة هو عدد منته (أو معلوم) . في الحياة العملية كثيرا ما نصادف تجارب ، عدد الحالات الممكنة فيها غير منته . في مثل هذه الحالات نلاحظ أن التعريف التقليدى لايجدي مما يظهر لنا محدودية هذا التعريف .

ومن نقاط الضعف الاخرى في التعريف التقليدى هو أنه في أحيان كثيرة لايمكن تصور او تحديد نتيجة التجربة بشكل حالات ممكنة ، والاصعب من هذا هو ايجاد اساس يسمح باعتبار أن الحالات الممكنة هي متكافئة .

لهذه الاسباب ، بالاضافة الى التعريف التقليدى للاحتمال يستخدم ايضـا التعريف الاحصائي للاحتمال حيث يعتبر التكرار النسبي كاحتمال احصائي لوقـوع الحادث .

٧ـ الحوادث المتكافئة :

الحوادث المتكافئة تسمى تلك الحوادث التي يوجد اساس لاعتبار ان احتمـال وقوع اى حادث منها لايبدو أكبر من احتمال وقوع الحوادث الاخرى .

مثال :

ظهور الشعار او الكتابة عند رمي قطعة نقود هي حوادث متكافئة .

مثال :

ظهور احد الارقام عند رمي حجر النرد هي حوادث متكافئة .

تمارين محلولة

١) يوجد في صندوق (٥٠) مصباحا كهربائيا ، منهم (٥) معطوبين • سحب عشوائيا مصباح واحد • احسب الاحتمال بأن يكون المصباح المسحوب معطوبا •

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{50} = 0.1$$

٢) رمينا زهرة نرد • ماهو احتمال حصولنا على عدد زوجي ؟

الحالات الممكنة : 6 5 4 3 2 1

الحالات المواتية : 6 4 2

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

٣) في كيس خمس بطاقات متساوية في الحجم والملمس • كل بطاقة تحمل حرفا من الحروف التالية : ر ، ي ، ا ، ض ، ة • ماهو احتمال حصولنا على كلمة " رياضة " اذا قمنا بسحب بطاقة واحدة في كل مرة دون اعادتها الى الكيس ؟

عدد الحالات الممكنة : $n! = 5! = 120$

عدد الحالات المواتية : 1،

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$$

٤) من المثال السابق ، احسب احتمال الحصول على كلمة رضا •

عدد الحالات الممكنة : $P_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$

عدد الحالات المواتية : 1،

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{60}$$

٥) مركز مراقبة الانتاج في أحد المصانع وجد أنه من أصل مئة وحدة منتجة هناك خمس وحدات معطوبة ماهو التكرار النسبي للوحدات المعطوبة ؟

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

٦) التكرار النسبي لاصابة الهدف لاحد الرماة هو (٨٥ر٠) ٠ أوجد عدد مرات اصابة الهدف اذا قام الرامي بالرمي (١٢٠) مرة ٠

$$m = W(A)\ .\ n$$

$$m = 0.85\ .\ 120 = 102$$

الفصل الثالث

جمع وضرب الاحتمالات

١ - جمع احتمالات الحوادث المتنافية ·

نظرية: احتمال وقوع احد حادثين متنافيين دون تفريق ايهما ($A+B$) ، يساوى مجموع احتمال هذين الحادثين :

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

البرهان : لنفرض أن :

n - عدد الحالات الممكنة ؛

m_1 - عدد الحالات المواتية للحادث A ؛

m_2 - عدد الحالات المواتية للحادث B .

عددالحالات المواتية لوقوع اما الحادث A أو B يساوى $m_1 + m_2$

وبالتالي :

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$$

لنأخذ بعين الاعتبار أن :

$$\frac{m_1}{n} = P(A) \quad , \quad \frac{m_2}{n} = P(B)$$

ومنه فان :

$$P(A) = P(A) + P(B)$$

نتيجة : احتمال وقوع حادث ما من عدة حوادث متنافية مثنى مثنى يساوى مجموع احتمالات هذه الحوادث :

$$P(A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_n)$$

مثال :

يوجد في صندوق ٣٠ كره : ١٠ حمراء و ٥ زرقاء و ١٥ بيضاء. ماهو احتمال سحب كرة ملونة (حمراء أو زرقاء) ·

لنفرض ان الحادث A هو سحب كرة حمراء و B هو سحب كرة زرقاء ، ومنه فان :

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{5}{\ldots} = \frac{1}{\ldots}$$

الحوادث A و B متنافية (سحب كرة من لون ينفي سحب كرة من لون اخر)
ومنه :

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

٢ ـ المجموعة التامة للحوادث ·

المجموعة التامة للحوادث هي مجموعة الحوادث المتنافية الممكنة للتجربة.

مثال :

من المثال الذى اوردناه في الفقره السابقه ، نلاحظ أن الحوادث الممكنة هي :

A_1 ـ سحب كرة حمراء واحتماله $P(A_1) = \frac{10}{30}$

A_2 ـ سحب كرة زرقاء واحتماله $P(A_2) = \frac{5}{30}$

A_3 ـ سحب كرة بيضاء واحتماله $P(A_3) = \frac{15}{30}$

هذه هي الحوادث الممكنة وتشكل مجموعه تامة ·

نظرية : مجموع احتمالات الحوادث المتنافية $A_1, A_2, ...A_n$ والتي تشكل مجموعه تامه يساوى الواحد : $P(A_1) + P(A_2) +.....+P(A_n) = 1$

البرهان : بما ان وقوع احد حوادث المجموعه التامة هو اكيد واحتمال الحادث الاكيد يساو ى الواحد ، فان :

$$P(A_1 + A_2 + ...+ A_n) = 1 \qquad I$$

أى حادثين من المجموعة التامة هما متنافيان ، لهذا وبالاستناد الى نظرية جمع الاحتمالات فان :

$$P(A_1 + A_2 + ...+ A_n) = P(A_1) + P(A_2) +....+P(A_n) \qquad II$$

من I و II نحصل على

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

من المثال السابق نلاحظ أن :

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{10}{30} + \frac{5}{30} + \frac{15}{30} = 1$$

٣ـ الحوادث المتكاملة .

الحادثان الوحيدان الممكنان يسميان متكاملين اذا كانا يشكلان مجموعة تامة. اذا رمزنا لاحد هذين الحادثين ب A فان الحادث الاخر المكمل يرمز له عادة ب $\bar{A}$.

مثال :

في صندوق (٥) كرات متساوية في الحجم والملمس ومختلفة في اللون،٣ حمراء و ٢ بيضاء والمطلوب سحب كرة حمراء .

اذا كان الحادث (A) هو كون الكرة المسحوبة حمراء فان الحادث المكمل $(\bar{A})$ في هذه الحالة هو الا تكون الكرة المسحوبه حمراء اي بيضاء .

نظرية : مجموع احتمال الحادثين المتكاملين يساوى الواحد :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

البرهان : ان الحادثين المتكاملين يشكلان مجموعة تامة ، ومجموع احتمالات الحوادث التي تشكل مجموعة تامة يساوى الواحد .

ملاحظه : اذا كان احتمال احد الحادثين المتكاملين هو p واحتمال الحادث المكمل هو q فبالاستناد الى النظرية السابقه :

$$p + q = 1$$

مثال :

بفرض أن احتمال كون اليوم التالي ممطر هو ($p = 0.70$) فما هو احتمال بأن يكون غير ممطر ؟

ان الحادثين بأن يكون اليوم التالي ممطرا أو غير ممطر هما حادثان متكاملان لهذا :

$$p + q = 1$$

ومنه :

$$q = 1 - p = 1 - 0.70 = 0.3$$

٤ ـ الحوادث المستقلة وغير المستقلة .

نقول عن حادثين بأنهما مستقلان ، اذا كان احتمال احدهما لايرتبط بوقوع أو عدم وقوع الحادث الاخر .

مثال :

لنفرض أننا ألقينا قطعة نقود مرتين . الحادث A هو ظهور الشعار في الرمية الاولى ، والحادث B ظهور الشعار في الرمية الثانية . نلاحظ ان ظهور الشعار في الرمية الاولى لايتوقف على نتيجة الرمية الثانية.كما ان ظهور الشعار في الرمية الثانية لايتوقف على نتيجة الرمية الاولى.اذن الحادثان A و B هما مستقلان .

نقول عن عدة حوادث انها مستقلة مثنى مثنى اذا كان كل اثنين منهما مستقلين.

٥ ـ ضرب احتمالات الحوادث المستقلة .

نظرية : احتمال وقوع حادثين مستقلين معا ، أو في آن واحد (AB) ، يساوى الى حاصل ضرب احتمالي هذين الحادثين :

$$P(AB) = P(A) . P(B)$$

البرهان : ليكن :

n ـ عدد الحالات الممكنة للتجربة والتي يقع أو لايقع فيها الحادث (A) ؛
n_1 ـ عدد الحالات المواتية للحادث A ($n_1 \leq n$) ،
m ـ عدد الحالات الممكنة للتجربة والتي يقع أو لايقع فيها الحادث B ،
m_1 ـ عدد الحالات المواتية للحادث B ($m_1 \leq m$) .

العدد الكلي للحالات الممكنة للتجربة (والتي يقع فيها الحوادث : A و B ، أو A و $\bar{B}$ ، أو $\bar{A}$ و B ، أو $\bar{A}$ و $\bar{B}$) يساوى nm . في كل مرة من الحالات الممكنة n ، والتي قد يقع فيها الحادث A أو لايقع ، يمكن مرافقتها مع كل مرة من الحالات الممكنة m والتي قد يقع فيها الحادث B أو لايقع . ومنه فان $n_1 m_1$ هو عدد الحالات المواتية لوقوع الحادثين A و B معا . بالواقع ، في كل مرة من n_1 حالة مواتية للحادث A ، يمكن أن يترافق مع كل مرة من m_1 حالة مواتية للحادث B . ومنه فان احتمال وقوع الحادثين A و B معا هو :

$$P(AB) = \frac{n_1 m_1}{nm} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m}$$

فاذا اخذنا بعين الاعتبار أن :

$$\frac{n_1}{n} = P(A)$$

و

$$\frac{m_1}{m} = P(B)$$

وبالتبديل نحصل على :

$$P(AB) = P(B) \, . \, P(A)$$

مثال :

لنفترض أننا رمينا زهرة نرد وقطعة نقود معا ، فماهو احتمال ظهور شعار وعدد زوجي بآن واحد ؟

ليكن :

A — ظهور عدد زوجي ؛

B — ظهور الشعار .

ومنه ، فان :

$$n = 6 \quad , \; n_1 = 3$$

$$m = 2 \quad , \; m_1 = 1$$

$$P(AB) = P(A) . P(B) = \frac{3}{6} \, . \, \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ملاحظة (١) : نقول عن عدة حوادث انها مجموعة حوادث مستقلة، اذا كان كل واحد منها مع أى تركيبة من الحوادث الباقية (والتي تضم اما جميع الحوادث الباقية أو قسما منها) يعتبروا حوادث مستقلة .

ملاحظة (٢) : اذا كانت الحوادث $A_1 \, , \, A_2 \, ,.....A_n$ هي مجموعة حوادث مستقلة فان الحوادث المكملة $\bar{A}_1, \; \bar{A}_2,...., \; \bar{A}_n$ هي ايضا مجموعة حوادث مستقلة .

نتيجة : احتمال وقوع، في آن واحد، عدة حوادث تشكل فيما بينها مجموعة حوادث مستقلة ، يساوى حاصل ضرب احتمالات هذه الحوادث ببعضها :

$$P(A_1 \, A_2 \, ... \, A_n) = P(A_1) \, . \, P(A_2) \, ...P(A_n)$$

مثال :

احسب احتمال ظهور الشعار عند رمي قطعتي نقود معا (في كل منهما).

لنرمز ب :

A — لظهورالشعار على القطعة الاولى ؛
B — لظهورالشعار على القطعة الثانية.

ومنه :

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

٦ — احتمال وقوع على الاقل حادث واحد.

لنفرض أنه بنتيجة تجربة مايمكن ان يقع ثلاثةحوادث ،وقوع على الاقل حادث واحد من هذه الحوادث يعني وقوع اما واحد أو اثنين أو ثلاثة حوادث .

نظرية: احتمال وقوع علىالاقل حادث واحد من الحوادث $A_1, A_2.., A_n$ التي هي مجموعةحوادث مستقلة يساوى الواحد مطروحا منه حاصل ضرب احتمالات الحوادث المكملة $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 . q_2 ...... q_n$$

البرهان : لنرمز بـ A للحادث الذييعني وقوع حادث واحد على الاقل من الحوادث : $A_1, A_2, ..., A_n$. الحادثان A و $(\bar{A}_1 \ \bar{A}_2 .... \bar{A}_n)$ (عدم وقوع أى حادث موات)هماحادثان متكامـلان وبالتالي فان مجموع احتماليهما يساوى الواحد:

$$P(A) + P(\bar{A}_1 \ \bar{A}_2 .... \bar{A}_n) = 1$$

من هنا وبالاستناد الى نظرية ضرب الاحتمالات نحصل على :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \ \bar{A}_2 ....\bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1) . P(\bar{A}_2) ....P(\bar{A}_n)$$

أو

$$P(A) = 1 - q_1 . q_2 .....q_n$$

مثال :

ثلاثة رماة يطلقون على هدف في آن واحد . كل واحد منهم يطلق طلقة واحدة واحتمال اصابة الهدف لكل منهم على التوالي يساوى :

$$p_1 = 0.8 \ , \ p_2 = 0.7 \ , \ p_3 = 0.9$$

احسب احتمال اصابة الهدف من واحد من الرماة على الاقل .

احتمال اصابة الهدف لكل رامي لايتوقف على نتيجة الرامي الاخر ، وهذا يعني أن A_1, A_2, A_3 هي مجموعة حوادث مستقلة حيث :

A_1 — اصابة الهدف من قبل الرامل الاول ؛

A_2 — اصابة الهدف من قبل الرامي الثاني ؛

A_3 — اصابة الهدف من قبل الرامي الثالث .

احتمالات الحوادث المكملة للحوادث A_1, A_2, A_3 (أى احتمالات الاخفاق في اصابة الهدف) تساوى على التوالي :

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0.9 = 0.1$$

فاذا كان A هو اصابة الهدف من واحد من الرماة على الاقل فان الاحتمال المطلوب هو :

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$$

$$P(A) = 1 - (0.2)(0.3)(0.1) = 0.994$$

٧ — الاحتمال الشرطي .

الاحتمال الشرطي $P_A(B)$ ، هــو احتمال وقوع الحادث B بفرض أن الحادث A قد وقع .

مثال :

في صندوق ٣ كرات بيضاء و ٣ كرات سوداء . قمنا بالسحب من الصندوق مرتين بدون ان نعيد الكرة المسحوبة اليه . ماهو احتمال ان تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية بيضاء (الحادث B) اذا كانت الكرة التي سحبت في المرة الاولى سوداء (الحادث A).

بعد السحب الاول بقي في الصندوق (٥) كرات (٣ بيضاء و ٢ سوداء) اذن

الاحتمال المطلوب :

$$P_A(B) = \frac{3}{5}$$

٨ - ضرب احتمالات الحوادث غير المستقلة .

لنفرض أن الحادثين A و B غير مستقلين وأن (A) P و ($P_A(B$ معلومة كيف يمكن أن نحسب احتمال وقوع هذين الحادثين في آن واحد (أى احتمال وقوع الحادث A والحادث B معا) ؟ الجواب تعطيه النظرية التالية :

نظرية : احتمال وقوع حادثين غيرمستقلين يساوى حاصل ضرب احتمال احدهما بالاحتمال الشرطي للاخر والمحسوب بافتراض ان الحادث الاول قد وقع :

$$P(AB) = P(A) \,.\, P_A(B)$$

نتيجه : احتمال وقوع عدة حوادث غيرمستقله معا يساوى حاصل ضرب احتمال احدهما بالاحتمالات الشرطية لبقية الحوادث ، حيث الاحتمال الشرطي لكل حادث تال يحسب بفرض ان الحوادث السابقة له قد وقعت :

$$P(ABC) = P(A) \,.\, P_A(B) \,.\, P_{AB}(C)$$

أو

$$P(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n) = P(A_1) \,.\, P_{A1}(A_2) \,.\, P_{A1\ A2}(A_3) \ldots P_{A1\ A2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

حيث :

$P_{A1\ A2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$: احتمال الحادث A_n بافتراض ان الحوادث $A_1 , A_2 , \ldots A_{n-1}$ قد وقعت .

مثال :

يوجد في صندوق الكرات التالية : ٥ بيضاء ، ٤ سوداء ، ٣ زرقاء. في كل تجربة نسحب كرة واحدة ولانعيدها الى الصندوق . ماهو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في التجربة الاولى بيضاء (الحادث A) وفي الثانيه سوداء (الحادث B) وفي الثالثة زرقاء (الحادث C) ؟

- احتمال سحب كرة بيضاء في التجربة الاولى :

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

- احتمال سحب كرة سوداء في التجربه الثانيه بفرض ان الكره المسحوبه في التجربه الاولى كانت بيضاء :

$$P_A(B) = \frac{4}{11}$$

– احتمال سحب كرة زرقاء في التجربه الثالثة بفرض ان الكرة المسحوبه في التجربه الاولى كانت بيضاء وفي الثانيه كانت سوداء :

$$P_{AB}(C) = \frac{3}{10}$$

– الاحتمال المطلوب :

$$P(ABC) = P(A) \,.\, P_A(B) \,.\, P_{AB}(C)$$

$$P(ABC) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

٩– جمع احتمالات الحوادث غير المتنافية .

الحادثان غير المتنافيين هما الحادثان اللذان وقوع احدهما لاينفي (او لايمنع) وقوع الاخر في نفس التجربة .

مثال :

لنفرض اننا قمنا برمي زهرة نرد مرة واحدة . وكان الحادث A هو ظهور الرقم ٤ والحادث B هو ظهور رقم زوجي فالحادثان A و B هنا حادثان غير متنافيين.

اذا كان الحادثان A و B غير متنافيين ، كيف نحسب احتمال الحادث A+B (والذي يعني ظهور على الاقل واحد من الحادثين A و B)؟

الجواب على هذا السؤال تعطيه نظرية جمع احتمالات الحوادث غير المتنافية.

نظرية : احتمال وقوع على الاقل أحد حادثين غير متنافيين يساوي مجموع احتمالي هذين الحادثين مطروحا منه احتمال وقوعهما معا .

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

البرهان : بما أن الحادثين A و B معطيان لنا على أنهما غير متنافيين ، فان الحادث A+B سيقع اذا وقع : $A\bar{B}$ أو $\bar{A}B$ أو AB وهي حوادث متنافية، وحسب نظرية جمع احتمالات الحوادث المتنافية فان :

$$P(A+B) = P(AB) + P(AB) + P(AB) \qquad \text{I}$$

الحادث A سيحدث اذا وقع أحد الحادثين المتنافيين التاليين : $A\bar{B}$ أو AB وحسب نظرية جمع احتمالات الحوادث المتنافية لدينا :

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$$

ومن هنا :
$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) \qquad II$$

وبشكل مماثل نحصل على مايلي :
$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) \qquad III$$
لنبدل II و III في I نحصل على :
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad IV$$

ملاحظة(١) : عند استخدام الصيغة (IV) يجب الاخذ بعين الاعتبار أن A و B يمكن أن يكونا حادثين مستقلين أو غير مستقلين فمن أجل الحوادث المستقلة :

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\ .\ P(B)$$
ومن أجل الحوادث غير المستقلة:
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\, P_A(B)$$

ملاحظة (٢) : اذا كان الحادثان A و B متنافيين ، فان وقوعهما معا يعتبر حادثا مستحيلا ، وبالتالي فان : $P(AB) = 0$ ومنه فان الصيغة (IV) للحوادث المتنافية تأخذ الشكل التالي :

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

مثال:

احتمال اصابة الهدف من بندقتين يساوي على التوالي : $p_1=0.7$, $p_2 = 0.8$ احسب احتمال اصابة الهدف علىالاقل لبندقية واحدة اذا تم رمي طلقه واحده من كل بندقية .

احتمال اصابة الهدف لكل بندقيهلايتعلق بنتيجة الاطلاق للبندقية الاخرى لهذا فان الحادث A (اصابة الهدف للبندقية الاولى) والحادث B (اصابة الهـــدف للبندقية الثانية) هما حادثان مستقلان .

— احتمال الحادث AB (كلتا البندقيتين أصابت الهدف)

$$P(AB) = P(A)\ .\ P(B)$$
$$P(AB) = (0.7)(0.8) = 0.56$$

— الاحتمال المطلوب :

$$P(A+B) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$$

١٠ ــ صيغة الاحتمال التام .

لنفرض أن الحادث A يمكن ان يقع بشرط وقوع أحد الحوادث المتنافية التالية :

$$B_1 \; , B_2 , \ldots\ldots , \; B_n$$

حيث هذه الحوادث تشكل مجموعة تامة ولنفرض أنه معلوم لدينا احتمالات هذه الحوادث وكذلك احتمالات الحوادث الشرطية للحادث A :

$$P_{B1}(A) \; , P_{B2}(A), \ldots\ldots , P_{Bn}(A)$$

كيف نحدد احتمال الحادث A ؟ الجواب على هذا السؤال تعطيه النظرية التالية.

نظرية: احتمال الحادث A الذى يمكن أن يقع فقط بشرط وقوع أحد الحوادث المتنافية التالية :

$$B_1 \; , \; B_2, \ldots\ldots , \; B_n$$

والتي تشكل مجموعة تامة ، يساوي مجموع حاصل ضرب احتمال كل حادث من هذه الحوادث بالاحتمال الشرطي المقابل للحادث A :

$$P(A) = P(B_1)\, P_{B1}(A) \; + \; P(B_2) \; P_{B2}(A) + \ldots\ldots + P(B_n) P_{Bn}(A)$$

هذه الصيغة تسمى صيغة الاحتمال التام .

البرهان : من المعطيات نرى أن الحادث A يمكن أن يقع اذا وقع أحد الحوادث المتنافية :

$$B_1 \; , \; B_2, \ldots\ldots\ldots , B_n$$

وبعبارة أخرى ، وقوع الحادث A يعني تحقق أحد ــ وبدون تفريق ايهم ــ الحوادث المتنافية :

$$B_1A \; , \; B_2A, \; \ldots , \; B_nA$$

وحسب نظرية جمع الاحتمالات ، فان :

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots\ldots + P(B_nA) \qquad \mathrm{I}$$

وبالاستناد الى نظرية ضرب الاحتمالات للحوادث غير المستقلة نستطيع حساب كل حد من حدود الطرف الثاني للمعادله (I) ، حيث :

$$\begin{aligned} P(B_1A) &= P(B_1) \,.\, P_{B1}(A) \\ P(B_2A) &= P(B_2) \,.\, P_{B2}(A) \\ \ldots & \quad \ldots \\ P(B_nA) &= P(B_n) \,.\, P_{Bn}(A) \end{aligned}$$

لنبدل كل حد من حدود الطرف الثاني للمعادلة (I) بمايساويه نحصل على

$$P(A) = P(B1)\, P_{B1}(A) + P(B_2)\, P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n)\, P_{Bn}(A).$$

مثال :

لدينا صندوقان كل صندوق يضم عددا من المصابيح،بعض هذه المصابيح سليم وبعضها الاخر معطوب ،احتمال سحب مصباح سليم من الصندوق الاول هو (٨ر٠) ومن الصندوق الثاني (٩ر٠)ماهو احتمال سحب مصباح سليم من أحد الصندوقين ؟

لنفترض ان :

A – المصباح المسحوب سليم ؛

B_1 – المصباح المسحوب كان من الصندوق الاول؛

B_2 – المصباح المسحوب كان من الصندوق الثاني.

– الاحتمال بأن يكون المصباح قد سحب من الصندوق الاول :

$$P(B_1) = \frac{1}{2}$$

– الاحتمال بأن يكون المصباح قد سحب من الصندوق الثاني :

$$P(B_2) = \frac{1}{2}$$

– الاحتمال الشرطي بأن المصباح المسحوب من الصندوق الاول هو سليم :

$$P_{B1}(A) = 0.8$$

– الاحتمال الشرطي بان المصباح المسحوب من الصندوق الثاني هو سليم :

$$P_{B2}(A) = 0.9$$

– احتمال سحب مصباح سليم من احد الصندوقين :

$$P(A)=P(B_1) . P_{B1}(A) +P(B_2) .P_{B2}(A)$$

$$P(A) = (0.5)(0.8) + (0.5) (0.9) = 0.85$$

١١– احتمال الفرضيات ، صيغة بايز .

لنفرض أن الحادث A يمكن أن يقع بشرط وقوع أحد الحوادث المتنافية $B_1 \ , \ B_2, \ldots\ldots, \ B_n$

والتي تشكل مجموعة تامة ، ونظرا الى أنه لايعلم بصورة مسبقة أي من هذه الحوادث سيقع ، فاننا نطلق عليها اسم الفرضيات ، احتمال وقوع الحادث A يتحدد بصيغة الاحتمال التام :

$$P(A) = P(B_1) . P_{B1}(A) + P(B_2) . P_{B2}(A) +\ldots+P(B_n). P_{Bn}(A) \qquad \text{I}$$

لنفرض اننا قمنا بتجربة وبنتيجتها وقع الحادث A فكيف نحـــــدد

الاحتمالات الشرطية التالية :

$$P_A(B_1)\ ,\ P_A(B_2) ,\ldots, P_A(B_n)$$

لنجد اولا الاحتمال الشرطي $P_A(B_1)$.

حسب نظرية ضرب الاحتمالات غير المستقلة لدينا :

$$P(AB_1) = P(A) \,.\, P_A(B_1) = P(B_1) \,.\, P_{B1}(A)$$

ومن هنا

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \,.\, P_{B1}(A)}{P(A)} \qquad \text{II}$$

لنبدل $P(A)$ في المعادلة (II) بمايساويه في المعادلة (I) فنحصل على

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \;.\; P_{B1}(A)}{P(B_1) \,.\, P_{B1}(A) \;+ P(B_2)\, P_{B2}(A) + \;\ldots\; + P(B_n) \,.\, P_{Bn}(A)}$$

وعلى هذا الاساس يمكن حساب الاحتمال الشرطي لاية فرضية B_i حيث :
$i = 1, 2, \ldots, n$ بالصيغة التالية :

$$P_A(Bi) = \frac{P(Bi) \,.\, P_{Bi}(A)}{P(B_1) \,.\, P_{B_1}(A) \;+ P(B_2) \,.\, P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \,.\, P_{Bn}(A)}$$

هذه الصيغة تسمى صيغة بايز .

<u>مثال :</u>

لنفرض أن الاقسام الصناعية لاحد المعامل تنتج مصابيح كهربائية ، هذه المصابيح تخضع للفحص في مركزين وذلك للتحقق من سلامتها . احتمال وقوع المصباح للفحص في المركز الاول يساوي (٦ر٠) وفي المركز الثاني (٤ر٠). احتمال اقرار المركز الاول بأن المصباح هو سليم يساوي (٩٤ر٠) ، وهذا الاحتمال بالنسبة للمركز الثاني يساوى (٩٨ر٠). لنفرض أن أحد المصابيح بعد الفحص تبين أنه سليم ، ما هو احتمال أن يكون هذا المصباح قد تم فحصه في المركز الاول ؟

ليكن A هو الحادث بأن المصباح بعد فحصه تبين بأنه سليم والان يمكن ان نفترض :

١) المصباح تم فحصه في المركز الاول (الفرضية B_1) ؛
٢) المصباح تم فحصه في المركز الثاني (الفرضية B_2) .

الاحتمال المطلوب وهو أن يكون المصباح السليم تم فحصه في المركز الاول نحصل عليه باستخدام صيغة بايز :

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \,.\, P_{B1}(A)}{P(B_1) \,.\, P_{B1}(A) + P(B_2)\, P_{B2}(A)}$$

من المعطيات لدينا :

$$P(B_1) = 0.6 \quad ; \quad P(B_2) = 0.4$$

$$P_{B1}(A) = 0.94 \; ; \; P_{B2}(A) = 0.98$$

الاحتمال المطلوب :

$$P_A(B_1) = \frac{(0.6)\,(0.94)}{(0.6)\,(0.94) + (0.4)\,(0.98)} = 0.59$$

تمارين محلولة

١) يرمي احد الرماة على هدف مقسم الى ثلاثة اقسام . احتمال ان يصيب الرامي القسم الاول من الهدف يساوى (٤٠ر٠) واحتمال اصابة القسم الثاني (٣٠ر٠). احسب احتمال اصابة اما القسم الاول واما القسم الثاني اذا تم رمي طلقة واحدة فقط.

ليكن :

A — أن الطلقة أصابت القسم الاول من الهدف ؛

B — ان الطلقة اصابت القسم الثاني من الهدف .

الحادثان A و B متنافيان ، لان اصابة قسم ماينفي اصابة القسم الاخر ومنه :

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A+B) = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

٢) يتلقى قسم البريد في احدى المؤسسات رسائل من فروعه الثلاثة فقط A و B و C . احتمال أن تكون الرسالة المتلقاة من الفرع A هو (٧ر٠) ، ومن الفرع B يساوى (٢ر٠). احسب احتمال تلقي الرسائل من الفرع C .

ليكن :

A — تلقي رسائل من الفرع الاول ؛

B — تلقي رسائل من الفرع الثاني ؛

C — تلقي رسائل من الفرع الثالث .

الحوادث A و B و C تشكل مجموعة تامة ، ومنه

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

وبالتالي فان الاحتمال المطلوب :

$$P(C) = 1 - \left[P(A) + P(B)\right]$$

$$P(C) = 1 - (0.7 + 0.2) = 0.1$$

٣) يوجد في صندوق (n) مصباحا كهربائيا ، منهم (m) صالحة للاستعمال. اوجد احتمال أنه من (k) مصباحا سحبت عشوائيا من الصندوق ، يوجد على الاقل مصباح واحد صالح للاستعمال .

الحادث " بين المصابيح المسحوبة يوجد على الاقل مصباح واحد صالح للاستعمال" والحادث " بين المصابيح المسحوبة لايوجد أى مصباح صالح للاستعمال (أى كلها معطوبة) " هما حادثان متكاملان،اذا رمزنا لهذين الحادثين على التوالي بـ A و $\bar{A}$ ، فان :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

لنحسب $P(\bar{A})$.

عدد التوافق التي نستطيع الحصول عليها عندما نسحب k مصباحا من n يساوي C_n^k ، عدد المصابيح المعطوبة يساوي ($n - m$) ، من هذا العدد نستطيع الحصول على C_{n-m}^k توفيقا اذا كان كل توفيق يتألف من k مصباحا .

ومنه فان الاحتمال بأن يكون بين k مصباحا مسحوبا لايوجد اى مصباح صالح للاستعمال يساوى :

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

اذن ، الاحتمال المطلوب :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

٤— في احدى الوجبات الانتاجية المؤلفة من (١٠) قطع ، هناك (٨) صالحة. احسب احتمال بأنه من بين قطعتين مسحوبتين عشوائيا يوجد على الاقل قطعة واحدة صالحة للاستعمال .

اذا كان :

A — يوجد على الاقل قطعة واحدة صالحة للاستعمال ؛

$\bar{A}$ — لايوجد ولاقطعة صالحة (أي القطعتين المسحوبتين معطوبتين) .

وبتطبيق القانون الذى حصلنا عليه في التمرين السابق :

$$P(A) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

حيث : $n = 10, m = 8 \quad , \quad k=2$

فاننا نستطيع حساب الاحتمال المطلوب على الشكل التالي :

$$C_{n-m}^{k} = C_{2}^{2} = \frac{2\,!}{2!\,(2-2)\,!} = 1$$

$$C_{n}^{k} = C_{10}^{2} = \frac{10\,!}{2!\,(10-2)\,!} = 45$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$$

٥) في صندوق (١٠) قطع منهم قطعتين معطوبتين • سحبنا عشوائيا (٦) قطع. احسب الاحتمال بأنه ضمن القطع المسحوبة يوجد على الاكثر قطعة واحدة معطوبة •

ليكن :

A – جميع القطع المسحوبة صالحة ؛

B – يوجد قطعة واحدة معطوبة ضمن القطع المسحوبة.

ومنه :

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A+B) = \frac{C_{8}^{6}}{C_{10}^{6}} + \frac{C_{2}^{1} \cdot C_{8}^{5}}{C_{10}^{6}}$$

$$P(A+B) = \frac{28}{210} + \frac{(2)(56)}{210} = \frac{2}{3}$$

٦) احتمال وقوع كل حادث من الحوادث المستقلة A_3 ، A_2 ، A_1 يساوي على التوالي p_3 ، p_2 ، p_1 • احسب احتمال وقوع حادث واحد فقط من هذه الحوادث •

نلاحظ ان-على سبيل المثال - وقوع الحادث A_1 فقط هو مكافئ لوقوع الحادث $(A_1\ \bar{A}_2\ \ \bar{A}_3)$ أى وقوع الحادث الاول وعدم وقوع الحادثين الثاني والثالث .

لنستخدم الرموز التالية :

- B_1 - وقوع فقط الحادث A_1 ، أي $B_1 = A_1\ \bar{A}_2\ \ \bar{A}_3$
- B_2 - وقوع فقط الحادث A_2 ،أي $B_2 = A_2\ \bar{A}_1\ \ \bar{A}_3$
- B_3 - وقوع فقط الحادث A_3 ،أي $B_3 = A_3\ \bar{A}_1\ \ \bar{A}_2$

لتحديد احتمال وقوع واحد فقط من الحوادث A_1 , A_2, A_3 يجب حساب الاحتمال $P(B_1 + B_2 + B_3)$ (أي احتمال وقوع واحد ، بدون تمييز أيهم،من الحوادث B_1 , B_2, B_3) .

بما أن الحوادث B_1 , B_2, B_3 متنافية وبالاستناد الى نظرية جمع الاحتمالات ، فان :

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) \qquad \mathrm{I}$$

لنحدد الان احتمال كل حادث من الحوادث B_1, B_2, B_3:

الحوادث A_1, A_2 , A_3 مستقلة وبالتالي فان الحوادث التالية ايضا مستقلة $\bar{A}_1, \bar{A}_2 , \bar{A}_3$ ولهذا نستخدم نظرية ضرب الاحتمالات

$$P(B_1) = P(A_1\ \bar{A}_2\ \ \bar{A}_3) = P(A_1) . P(\bar{A}_2) .P(\bar{A}_3) = p_1\ q_2 q_3$$

وبنفس الطريقة نحصل على :

$$P(B_2) = p_2\ q_1\ q_3 \quad , \ P(B_3) = p_3\ q_1\ q_2$$

بتبديل هذه الاحتمالات في العلاقة (I) نحصل على احتمال وقوع حادث واحد فقط من الحوادث A_1, A_2, A_3 :

$$P(B_1+ B_2 + B_3) = p_1\ q_2\ q_3 + p_2 q_1\ q_3 + p_3 q_1\ q_2$$

٧) في احدى دور الطباعة يوجد اربع الات للطبع . احتمال ان تكون كل الة من هذه الالات تعمل في لحظة معينة يساوى (٩ر٠) احسب احتمال ان تكون على الاقل الة واحدة تعمل في لحظة معينة (الحادث A) .

بما ان الحوادث " الالة تعمل " و " الالة لاتعمل "-في لحظة معينة- هما حادثان متكاملان،فان مجموع احتماليهما يساوى الواحد :

$$p + q = 1$$

ومنه فان احتمال الحادث بأن الالة لاتعمل في لحظة معينة يساوي :

$$q = 1\text{-}p = 1\text{-}0.9 = 0.1$$

وعليه فان الاحتمال المطلوب :

$$P(A) = 1\text{-}q^4 = 1\text{-} (0.1)^4 = 0.9999$$

٨) احتمال ان يصيب احد الرماة الهدف يساوى (٩ر٠).قام الرامي بالرمي ثلاث مرات . احسب احتمال ان يكون الرامي قد اصاب الهدف في المرات الثلاث .

ليكن :

A — اصابة الهدف في المرة الاولى ؛

B — اصابة الهدف في المرة الثانية ؛

C — اصابة الهدف في المرة الثالثة .

هذه الحوادث مستقلة ومنه فان احتمال اصابة الهدف في المرات الثلاث هو

$$P(ABC) = P(A) \; . \; P(B) \; . \; P(C) = (0.9)\,(0.9)\,(0.9) = 0.729$$

٩) احتمال أن يصيب احد الرماة الهدف من طلقه واحده يساوي (٤ر٠).كم طلقة يجب على هذا الرامي اطلاقها حتى يصيب الهدف على الاقل مرة واحدة باحتمال لايقل عن (٩ر٠).

لنرمز بـ (A) للحادث " عند n طلقة يصيب الرامي الهدف على الاقل مرة واحدة ".

الحوادث : اصابة الهدف في الطلقة الاولى ، الثانية الخ... ، هي حوادث مستقلة.

لذلك :

$$P(A) = 1 - q^n$$

من معطيات التمرين نلاحظ ان :

$$P(A) > 0.9$$

$$p = 0.4$$

وبالتالي :

$$q = 1\text{-}0.4 = 0.6$$

بناء على ماسبق ، فان :

$$1 - (0.6)^n \geqslant 0.9$$

ومنه :

$$(0.6)^n \leqslant 0.1$$

وباستخدام اللوغارتيمات ، ومع الاخذ بعين الاعتبار ان $0 < \log 0.6$

نجد ان :

$$n \geqslant 4.5$$

وبما ان n يجب ان تكون عددا صحيحا ، لذا

$$n \geqslant 5$$

اي يجب على الرامي ان يرمي مالايقل عن خمس رميات حتى يصيب الهدف على الاقل مرة واحده وذلك باحتمال لايقل عن ٠ر٩ .

١٠) لدينا ثلاث فئات من العمال : الفئة الاولى تضم (٢٠) عاملا ، الثانية (٦) ، الثالثة (٤) . احتمال تنفيذ الخطة الانتاجية للعامل في هذه الفئات يساوي على التوالي (٠ر٩٠) ، (٠ر٨٠) ، و (٠ر٧٥) . اخترنا عشوائيا عاملا واحدا، احسب احتمال كون هذا العامل ينفذ خطته الانتاجية .

ليكن :

A – العامل ينفذ الخطة ؛

B_1 – العامل من الفئة الاولى ؛

B_2 – العامل من الفئة الثانية ؛

B_3 – العامل من الفئة الثالثة .

الاحتمال المطلوب :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B3}(A)$$

$$P(B_1) = \frac{20}{30}, \quad P(B_2) = \frac{6}{30}, \quad P(B_3) = \frac{4}{30}$$

$$P_{B1}(A) = 0.9, \quad P_{B2}(A) = 0.8, \quad P_{B3}(A) = 0.75$$

$$P(A) = \frac{20}{30}0.9 + \frac{6}{30}0.8 + \frac{4}{30}0.75 = 0.86$$

(١١) بفرض ان رائد النشاط الرياضي في الكلية اختار الاعداد التالية من الطلاب لتشكيل فريق رياضي : (٤) من المجموعة الاولى ، (٦) من المجموعة الثانية و (٥) من المجموعة الثالثة . احتمال اختيار الطالب للفريق من هذه المجموعات يساوي على التوالي : (٩٠ر٠) و (٧٠ر٠) و (٨٠ر٠). اخترنا عشوائيا احد اعضاء الفريق، ماهي المجموعة الاكثر احتمالا بأن ينتمي اليها الطالب المختار .

ليكن :

B_1 — الطالب من المجموعة الاولى ؛

B_2 — الطالب من المجموعة الثانية ؛

B_3 — الطالب من المجموعة الثالثة ؛

A — الطالب اختير للفريق .

لتحديد الاحتمال المطلوب نستخدم صيغة بايز :

$$P_A(Bi) = \frac{P(Bi)\,P_{Bi}(A)}{P(B_1)\,.\,P_{B1}(A) + P(B_2)\,.\,P_{B2}(A) + P(B_3)\,.\,P_{B3}(A)}$$

لتعيين المجموعة الاكثر احتمالا بأن ينتمي اليها الطالب المختار يجب حساب الاحتمالات التالية ومقارنتها مع بعضها :

$P_A(B_1)\,,\ P_A(B_2)\ ,\ P_A(B_3)$

$$P_A(B_1) = \frac{\frac{4}{15}(0.9)}{\frac{4}{15}(0.9) + \frac{6}{15}(0.7) + \frac{5}{15}(0.8)} = \frac{18}{59}$$

$$P_A(B_2) = \frac{\frac{6}{15}(0.7)}{\frac{4}{15}(0.9) + \frac{6}{15}(0.7) + \frac{5}{15}(0.8)} = \frac{21}{59}$$

$$P_A(B_3) = \frac{\frac{5}{15}(0.8)}{\frac{4}{15}(0.9) + \frac{6}{15}(0.7) + \frac{5}{15}(0.8)} = \frac{20}{59}$$

المجموعة الثانية هي المجموعة الاكثر احتمالا بأن ينتمي اليها الطالب المختار.

الفصل الرابع

اعـادة التجربـة

١– قانون برنولي :

اذا كررنا تجربة عدة مـرات ، وكان في كل تجربة احتمال الحادث A غير مرتبط ببقية التجارب ، فاننا نقول عن مثل هذه التجارب بأنها مستقلة بالنسبة للحادث A.

في الفقرات القادمة سنبحث التجارب المستقلة التي فيها احتمال الحادث A ثابت في كل التجارب .

لنفرض أننا قمنا ب n تجربة مستقلة ، في كل تجربة الحادث A يمكن أن يقع أولا يقع وسنعتبر ان احتمال الحادث A في كل تجربة هو نفسه ويساوي (p) وبالتالي فان احتمال عدم وقوع الحادث A في كل تجربة هو ثابت ويساوي ($q = 1-p$).

لنحسب احتمال أنه عند القيام ب n تجربة الحادث A يقع k مـــرة وبالتالي فانه لايقع ($n-k$) مرة .

من الاهمية الاشارة الى أنه ليس من الضروري أن يتكرر الحادث (k) مرة في متتالية محددة. فاذا كان الحديث يدور مثلا حول وقوع الحادث (A) ثلاث مرات في اربعة تجارب ، فان الحوادث المركبة الممكنة هي التاليـــة :

$$AAA\bar{A} \;,\; AA\bar{A}A \;,\; A\bar{A}AA \;,\; \bar{A}AAA$$

حيث :

$AAA\bar{A}$ – حادث مركب (والحادث المركب عبارة عن مجموعة حـــوادث بسيطة) ويعني أنه في التجارب الاولى والثانية والثالثة الحادث A وقع بينما في الرابعة لم يقع ، حيث وقع الحادث المكمل $\bar{A}$.

١١) بفرض ان رائد النشاط الرياضي في الكلية اختار الاعداد التالية من الطلاب لتشكيل فريق رياضي : (٤) من المجموعة الاولى ، (٦) من المجموعة الثانية و (٥) من المجموعة الثالثة . احتمال اختيار الطالب للفريق من هذه المجموعات يساوي على التوالي : (٩٠ر٠) و (٧٠ر٠) و (٨٠ر٠). اخترنا عشوائيا احد اعضاء الفريق، ماهي المجموعة الاكثر احتمالا بأن ينتمي اليها الطالب المختار.

ليكن :

B_1 — الطالب من المجموعة الاولى ؛

B_2 — الطالب من المجموعة الثانية ؛

B_3 — الطالب من المجموعة الثالثة ؛

A — الطالب اختير للفريق .

لتحديد الاحتمال المطلوب نستخدم صيغة بايز :

$$P_A(Bi) = \frac{P(Bi)\, P_{Bi}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B3}(A)}$$

لتعيين المجموعة الاكثر احتمالا بأن ينتمي اليها الطالب المختار يجب حساب الاحتمالات التالية ومقارنتها مع بعضها :

$P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, $P_A(B_3)$

$$P_A(B_1) = \frac{\frac{4}{15}(0.9)}{\frac{4}{15}(0.9) + \frac{6}{15}(0.7) + \frac{5}{15}(0.8)} = \frac{18}{59}$$

$$P_A(B_2) = \frac{\frac{6}{15}(0.7)}{\frac{4}{15}(0.9) + \frac{6}{15}(0.7) + \frac{5}{15}(0.8)} = \frac{21}{59}$$

$$P_A(B_3) = \frac{\frac{5}{15}(0.8)}{\frac{4}{15}(0.9) + \frac{6}{15}(0.7) + \frac{5}{15}(0.8)} = \frac{20}{59}$$

المجموعة الثانية هي المجموعة الاكثر احتمالا بأن ينتمي اليها الطالب المختار.

الفصل الرابع

اعــادة التجربــة

١ـ قانون برنولي :

اذا كررنا تجربة عدة مـرات ، وكان في كل تجربة احتمال الحادث A غير مرتبط ببقية التجارب ، فاننا نقول عن مثل هذه التجارب بأنها مستقلة بالنسبة للحادث A.

في الفقرات القادمة سنبحث التجارب المستقلة التي فيها احتمال الحادث A ثابت في كل التجارب .

لنفرض أننا قمنا بـ n تجربة مستقلة ، في كل تجربة الحادث A يمكن أن يقع أولا يقع وسنعتبر ان احتمال الحادث A في كل تجربة هو نفسه ويساوي (p) وبالتالي فان احتمال عدم وقوع الحادث A في كل تجربة هو ثابت ويساوي ($q = 1-p$).

لنحسب احتمال أنه عند القيام بـ n تجربة الحادث A يقع k مـــرة وبالتالي فانه لايقع (n-k) مرة .

من الاهمية الاشارة الى أنه ليس من الضروري أن يتكرر الحادث (k) مرة في متتالية محددة.فاذا كان الحديث يدور مثلا حول وقوع الحادث (A) ثلاث مرات في اربعة تجارب ، فان الحوادث المركبة الممكنة هي التاليـــة:

$$AAA\bar{A} \ , \ AA\bar{A}A \ , \ A\bar{A}AA \ , \ \bar{A}AAA$$

حيث :

$AAA\bar{A}$ – حادث مركب (والحادث المركب عبارة عن مجموعة حـــوادث بسيطة) ويعني أنه في التجارب الاولى والثانية والثالثة الحادث A وقع بينما في الرابعة لم يقع ، حيث وقع الحادث المكمل $\bar{A}$.

نعود الى الاحتمال المطلوب تحديده وسنرمز له ب $P_n(k)$ فمثلا $P_5(3)$ يعني احتمال وقوع الحادث ثلاث مرات وعدم وقوعه مرتين حيث عدد التجارب يساوي (٥) . هذا الاحتمال يمكن حسابه باستخدام قانون برنولي .

استخراج قانون برنولي : احتمال الحادث المركب والذى يعني أن الحادث A في n تجربة سيقع k مرة ولايقع (n-k) مرة يساوي بالاستناد الى نظرية ضرب الاحتمالات المستقلة :

$$(p)^k (q)^{n-k}$$

ان عدد الحوادث المركبة . يساوى لعدد التوافيق التي نستطيع الحصول عليها من (n) عنصرا با خذ (k) عنصرا في كل مرة أى C_n^k .
وبما أن هذه الحوادث المركبة متنافية ، فان الاحتمال الذى نرغب بتحديده يساوي مجموع احتمالات جميع الحوادث المركبة الممكنة. ونظرا لان احتمال جميع هذه الحوادث المركبة هو ثابت (بالافتراض) فان الاحتمال المطلوب (وهو وقوع الحادث A في n تجربة k مرة) يساوي احتمال حادث مركب واحد مضروبا بعدد الحوادث المركبة الممكنة :

$$P_n(k) = C_n^k (p)^k (q)^{n-k}$$

أو

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} (p)^k (q)^{n-k}$$

هذا القانون يسمى قانون برنولي .

مثال :

الاحتمال بأن استهلاك الطاقة الكهربائية في اليوم لن يزيد عن المعدل يساوي (٧٥ر٠) احسب الاحتمال بأنه في الايام الستة القادمة استهلاك الطاقة الكهربائية خلال اربعة ايام لن يزيد عن المعدل .

احتمال الاستهلاك الطبيعي خلال الايام الستة ثابت ويساوي

$$p = 0.75$$

وبالتالي فان احتمال زيادة الاستهلاك عن هذا الحد في كل يوم أيضا ثابت ويساوي

$$q = 1 - p = 1 - 0.75 = 0.25$$

باستخدام قانون برنولي نحصل على الاحتمال المطلوب على الشكل التالي :

$$P_6(4) = C_6^4 (p)^4 (q)^{6-4} = \frac{6!}{4!(6-4)!}(0.75)^4(0.25)^2 = 0.30$$

٢- نظرية لابلاس المحلية .

من السهل ملاحظة أن استخدام قانون برنولي يصبح مضنيا اذا كانت (n) كبيرة لما يتطلبه ذلك من القيام بعمليات على أعداد كبيرة جدا. في هذه الحالة (أي عندما يكون عدد التجارب كبيرا بما فيه الكفاية) نستطيع الاعتماد على نظريـــة لابلاس المحلية لايجاد احتمال وقوع الحادث (k) مرة في (n) تجربة .

نظرية لابلاس المحلية : اذا كان احتمال (p) وقوع الحادث (A) في كل تجربة ثابت ويختلف عن الصفر والواحد ، فان احتمال $P_n(k)$ وقوع الحادث (A) في (n) تجربة (k) مرة يساوي تقريبا قيمة التابع (الدالة) :

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

حيث :

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

وكلما كانت (n) كبيرة كلما كانت النتيجة اكثر دقة.

يوجد جداول خاصه تعطينا قيمة التابع (الدالة) :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

وذلك للقيم الموجبة لـ x (جدول رقم ١) اما فيما يخص القيم السالبة لـ x فتستخدم نفس الجداول لان التابع $\varphi(x)$ زوجي ، أى :

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

نعود الى الاحتمال المطلوب تحديده وسنرمز له ب $P_n(k)$ فمثلا $P_5(3)$ يعني احتمال وقوع الحادث ثلاث مرات وعدم وقوعه مرتين حيث عدد التجارب يساوي (٥) . هذا الاحتمال يمكن حسابه باستخدام قانون برنولي .

استخراج قانون برنولي : احتمال الحادث المركب والذى يعني أن الحادث A في n تجربة سيقع k مرة ولايقع $(n-k)$ مرة يساوي بالاستناد الى نظرية ضرب الاحتمالات المستقلة :

$$(p)^k (q)^{n-k}$$

ان عدد الحوادث المركبة يساوي لعدد التوافيق التي نستطيع الحصول عليها من (n) عنصرا بأخذ (k) عنصرا في كل مرة أى C_n^k .
وبما أن هذه الحوادث المركبة متنافية ، فان الاحتمال الذى نرغب بتحديده يساوي مجموع احتمالات جميع الحوادث المركبة الممكنة. ونظرا لان احتمال جميع هذه الحوادث المركبة هو ثابت (بالافتراض) فان الاحتمال المطلوب (وهو وقوع الحادث A في n تجربة k مرة) يساوي احتمال حادث مركب واحد مضروبا بعدد الحوادث المركبة الممكنة :

$$P_n(k) = C_n^k (p)^k (q)^{n-k}$$

أو

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} (p)^k (q)^{n-k}$$

هذا القانون يسمى قانون برنولي .

مثال :

الاحتمال بأن استهلاك الطاقة الكهربائية في اليوم لن يزيد عن المعدل يساوي (٠ر٧٥) احسب الاحتمال بأنه في الايام السنة القادمة استهلاك الطاقة الكهربائية خلال اربعة ايام لن يزيد عن المعدل .

احتمال الاستهلاك الطبيعي خلال الايام الستة ثابت ويساوي

$$p = 0.75$$

وبالتالي فان احتمال زيادة الاستهلاك عن هذا الحد في كل يوم أيضا ثابت ويساوي

$$q = 1-p = 1-0.75 = 0.25$$

باستخدام قانون برنولي نحصل على الاحتمال المطلوب على الشكل التالي :

$$P_6(4) = C_6^4 (p)^4 (q)^{6-4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)\,!} (0.75)^4 (0.25)^2 = 0.30$$

٢– نظرية لابلاس المحلية .

من السهل ملاحظة أن استخدام قانون برنولي يصبح مضنيا اذا كانت (n) كبيرة لما يتطلبه ذلك من القيام بعمليات على أعداد كبيرة جدا. في هذه الحالة (أي عندما يكون عدد التجارب كبيرا بما فيه الكفاية) نستطيع الاعتماد على نظريـــة لابلاس المحلية لايجاد احتمال وقوع الحادث (k) مرة في (n) تجربة .

نظرية لابلاس المحلية : اذا كان احتمال (p) وقوع الحادث (A) في كل تجربة ثابت ويختلف عن الصفر والواحد ، فان احتمال $P_n(k)$ وقوع الحادث (A) في (n) تجربة (k) مرة يساوي تقريبا قيمة التابع (الدالة) :

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

حيث :

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

وكلما كانت (n) كبيرة كلما كانت النتيجة اكثر دقة.

يوجد جداول خاصه تعطينا قيمة التابع (الدالة) :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

وذلك للقيم الموجبة لـ x (جدول رقم ١) اما فيما يخص القيم السالبة لـ x فتستخدم نفس الجداول لان التابع $\varphi(x)$ زوجي ، أي :

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

وعليه فان الاحتمال بأن الحادث (A) سيقع في (n) تجربة مستقلة (k) مرة يساوي تقريبا :

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

حيث :

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

مثال :

احسب احتمال وقوع الحادث (A) ٨٠ مرة في ٤٠٠ تجربة اذا كان احتمال وقوع هذا الحادث في كل تجربة يساوي ٢٠ر٠ .

المعطيات : $n = 400 \;,\; k = 80 \;,\; p = 0.2 \;,\; q=0.8$

باستخدام نظرية لابلاس المحلية :

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400(0.2)(0.8)}} \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(x)$$

لنحسب قيمة (x) :

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-400(0.2)}{\sqrt{400\,(0.2)\,(0.8)}} = 0$$

من الجدل رقم (١) نجد أن

$$\varphi(0) = 0.3989$$

ومنه :

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{8} (0.3989) = 0.04986$$

اذا استخدمنا قانون برنولي نحصل على نفس النتيجة تقريبا :

$$P_{400}(80) = 0.0498$$

٣- قانون بواسون .

لنفرض اننا قمنا بـ (n) تجربة مستقلة في كل منها احتمال وقوع الحادث (A) يساوي (p) . لتحديد احتمال وقوع الحادث (k) مرة في هذه التجارب

يستعمل قانون برنولي ٠ اذا كانت (n) كبيره نعتمد على نظرية لابلاس المحلية ٠ حتى هذه النظرية تصبح غير مجدية اذا كان احتمال الحادث قليلا ($p < 0.1$) في مثل هذه الحالات (n كبيره و p صغيره) نلجأ الى قانون بواسون ٠

لتحديد احتمال وقوع الحادث (A)، (k) مرة، في (n) تجربة، عندما تكون (n) كبيره و (p) صغيره، نستخدم قانون بواسون التالي :

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

حيث :

$$\lambda = n\,p$$

ملاحظة : يوجد جداول خاصة باستعمالها يمكن ايجاد قيمة $P_n(k)$ بعد معرفة k و λ ٠

مثال :

ارسل أحد المعامل الى مخازن البيع (٥٠٠٠) قطعة سليمة من انتاجـــه، الاحتمال بأن تعطب بعض القطع في الطريق يساوى (٠٠٠٠٢ر٠)، احسب الاحتمال بأنه ستصل الى المخازن ثلاثة قطع معطوبة ٠

المعطيات : $n = 5000 \quad , p = 0.0002, \quad k = 3$

ومنه : $np = 5000\,(0.0002) = 1$

نحصل على الاحتمال المطلوب باستخدام قانون بواسون :

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{(1)^3 \; e^{-1}}{3!} \approx 0.06$$

٤ ــ نظرية لابلاس التكاملية ٠

لنفرض مجددا اننا قمنا بـ n تجربة في كل منها احتمال وقوع الحادث A ثابت ويساوي p $(0 < p < 1)$ ، كيف نحسب الاحتمال $P_n(k_1, k_2)$ بأن الحادث A سيقع في n تجربة لا أقل من k_1 ولا أكثر من k_2 مرة (للاختصار سنقول من k_1 الى k_2 مرة)؟ الجواب على هذا السؤال تعطيه نظرية لابلاس التكاملية ٠

نظرية: اذا كان احتمال (p) وقوع الحادث (A) في كل تجربة ثابت ويختلف عن الصفر والواحد فان الاحتمال $P_n(k_1 , k_2)$ بأن الحادث (A) سيقع في (n) تجربة من k_1 الى k_2 مرة يساوي تقريبا التكامل المحدد

$$P_n(k_1 , k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

حيث :

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad , \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

و :

بما ان التكامل غير المحدد $\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ لايعبر عنه بتوابع بدائية فلحل المسائل التي تتطلب استخدام نظرية لابلاس التكاملية يمكن اللجوء الى جداول خاصه تعطي :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

الجدول رقم (٢) يعطي قيم التابع $\Phi(x)$ المقابلة لقيم x الموجبة و $x=0$.
من اجل $x < 0$ تستخدم نفس الجداول ، لان $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

في الجدول رقم (٢) ادرجت قيم التكامل حتى $x=5$ فقط ، ذلك لانه من أجل $x > 5$ يمكن اخذ $\Phi(x) = 0.5$.

التابع $\Phi(x)$ يسمى تابع لابلاس .

حتى يمكن استخدام جداول تابع لابلاس لنعيد تشكيل العلاقة السابقة كمايلي :

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x'} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \Phi(x'') - \Phi(x')$$

ومنه ، فان احتمال وقوع الحادث (A) في (n) تجربة مستقلة من (k_1) الى (k_2) مرة :

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

حيث :

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

و :

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

<u>مثال</u> : احتمال أن يخرج من المصنع مصباح كهربائي بدون فحص هو (٢٠ر٠). تم سحب عشوائيا (٤٠٠) مصباح . ماهو الاحتمال بأن يكون هناك من (٧٠) الى (١٠٠) من المصابيح المسحوبة غير مفحوصة .

المعطيات :

$$p = 0.2 \;,\; q = 0.8 \;,\; n = 400,\; k_1 = 70 \;,\; k_2 = 100$$

باستخدام نظرية لابلاس التكاملية :

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

لنحسب الحد الادنى والاعلى للتكامل :

$$x` = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-400(0.2)}{\sqrt{400(0.2)(0.8)}} = -1.25$$

$$x`` = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100-400(0.2)}{\sqrt{400(0.2)(0.8)}} = 2.5$$

ومنه ، يكون لدينا :

$$\begin{aligned} P_{400}(70, 100) &= \Phi(2.5) - \Phi(-1.25) \\ &= \Phi(2.5) + \Phi(1.25) \end{aligned}$$

من الجدول رقم (٢) نجد أن :

$$\Phi(2.5) = 0.4938 \ ;$$
$$\Phi(1.25) = 0.3944 \ .$$

الاحتمال المطلوب :

$$P_{400}(70, 100) = 0.4938 + 0.3944 = 0.8882$$

<u>ملاحظة</u> : لنرمز ب (m) لعدد مرات تكرار الحادث (A) في (n)تجربة مستقلة ، في كل منها احتمال وقوع الحادث (A) ثابت ويساوي (p).اذا كان العدد (m) يتغير من (k_1) الى (k_2) فان الكسر $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ سيتغير

من :

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = x`$$

الى :

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = x``$$

وبالتالي فان نظرية لابلاس التكاملية يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$P\left(x` \leqslant \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x`` \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x`}^{x``} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

سنستخدم هذا الشكل فيما بعد .

٥ - احتمال انحراف التكرار النسبي عن احتمال ثابت في التجارب المستقلة .

أيضا هنا نفترض اننا قمنا ب (n) تجربة مستقلة ، في كل منها احتمال وقوع الحادث (A) ثابت ويساوي p $(0 < p < 1)$. لنجعل هدفنا هو ايجاد احتمال انحراف التكرار النسبي ($\frac{m}{n}$) عن احتمال ثابت (p) بقيمة مطلقة لاتزيد عن العدد ($\text{ع} > 0$) وبعبارة اخرى ، لنجد احتمال تحقق المتراجحة

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \text{ع} \qquad \mathrm{I}$$

لنرمز لهذا الاحتمال ب

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \text{ع} \right)$$

لنبدل المتراجحة (I) بما تكافئها :

$$-\text{ع} \leq \frac{m}{n} - p \leq \text{ع}$$

أو :

$$-\text{ع} \leq \frac{m - np}{n} \leq \text{ع} \qquad \mathrm{II}$$

لنضرب المتراجحة (II) بالعدد الموجب $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ فنحصل على متراجحة مكافئة

$$-\text{ع}\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \text{ع}\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

باستخدام نظرية لابلاس كما وردت في الملاحظة بالفقره السابقة وبفرض :

$$x' = -\text{ع}\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

و

$$x'' = \text{ع}\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

نحصل على :

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leqslant \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$= 2\ \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

لنبدل الطرف الاول بما يساويه في (I) نحصل على :

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

وعلى هذا فان احتمال تحقق المتراجحة :

$$\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon$$

يساوى تقريبا مرتين قيمة تابع لابلاس ، اى : $2\Phi(x)$

حيث :

$$x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

<u>مثال</u> :

بفرض أن احتمال كون المصباح معطوبا هو (١٠ر٠). سحبنا عشوائيا (٤٠٠) مصباح . احسب احتمال أن التكرار النسبي لظهور مصباح معطوب من بين المصابيح المسحوبه ينحرف عن الاحتمال (١ر٠) بقيمة مطلقة لاتزيد عن (٠٣ر٠).

المعطيات :

$$n = 400,\ p = 0.1\ ,\ q = 0.9\ ,\varepsilon = 0.03$$

والمطلوب حساب :

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0.1\right| \leqslant 0.03\right)$$

باستخدام القانون :

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

نحصل على :

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0.1\right| \leqslant 0.03\right) \approx 2\Phi\left(0.03\sqrt{\frac{400}{0.1(0.9)}}\right) =$$

$$= 2\Phi(2)$$

من الجدول رقم (٢) نجد أن

$$\Phi(2) = 0.4772$$

وبالتالي :

$$2\Phi(2) = 0.9544$$

ومنه ، الاحتمال المطلوب :

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0.1\right| \leqslant 0.03\right) \approx 0.9544$$

وهذا يعني اننا اذا سحبنا عددا كافيا من المصابيح المعدة للبيع (وهنا هذا العدد يساوي ٤٠٠) فانه باحتمال يساوي ٩٥٫٤٤٪ أن التكرار النسبي للمصابيح المعطوبة ينحرف عن الاحتمال الثابت (٠٫١) بمقدار لاتزيد قيمته المطلقة عن ٠٫٠٣ وبعبارة اخرى ، من بين الاربعمائة مصباح المسحوبة ، باحتمال قدره ٩٥٫٤٤٪ فان عدد المصابيح المعطوبة يتراوح بين ٢٨ و ٥٢ مصباحا حيث :

$$(0.1 - 0.03)\,400 = 28$$

و

$$(0.1+0.03)\,400 = 52$$

تمارين محلولة

١) في أحد الاقسام لاحد المصانع يوجد (٦) محركات ، احتمال أن كل محرك من هذه المحركات يعمل في لحظة معينهيساوي (٨ر٠) ٠ احسب احتمال انه في لحظة معينة :

ا) يعمل (٤) محركات ٠

ب) جميع المحركات تعمل ٠

ج) جميع المحركات متوقفة ٠

المعطيات : $n = 6\ ,\ p = 0.8,\quad q = 0.2$

القانون :

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(p)^k\ (q)^{n-k}$$

أ) احتمال انه في لحظة معينة يعمل (٤) محركات :

$$P_6\,(4) = \frac{6!}{4!\,(6-4)!}(0.8)^4\,(0.2)^2 = 0.246$$

ب) احتمال انه في لحظة معينة جميع المحركات تعمل :

$$P_6(6) = \frac{6!}{6!\,(6-6)\,!}(0.8)^6\,(0.2)^0 = 0.262$$

ج) احتمال أنه في لحظة معينة جميع المحركات متوقفة :

$$P_6(0) = \frac{6!}{0!(6-0)!}(0.8)^0(0.2)^6 = 0.000064$$

٢) قمنا بخمس تجارب مستقلة٠ احسب احتمال وقوع الحادث (A) لأقل عن مرتين ، اذا كان احتمال وقوع الحادث (A) في كل تجربة يساوى (٣ر٠)٠

ليكن :

B — وقوع الحادث A لأقل عن مرتين :

ومنه ، فان :

$$P(B) = 1 - \left[P_5(0) + P_5\,(1)\right]$$

٣) رمينا قطعة نقود (٦) مرات احسب احتمال ظهور الشعار :

أ) اقل من مرتين (الحادث A) .

ب) لا اقل عن مرتين (الحادث B).

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) = 0.0156 + 0.09375 = 0.10935$$

$$P(B) = 1-\left[P_6(0) + P_6(1)\right]$$
$$= 1-0.10935 = 0.89$$

٤) احسب الاحتمال التقريبي بأنه عند اجراء (٤٠٠) تجربة ، الحادث سيقع (١٠٤) مرات اذا كان احتمال وقوعه في كل تجربة يساوي (٢ر٠).

المعطيات :

$$n = 400,\ k = 104,\ p=0.2,\ q = 0.8$$

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{104-400(0.2)}{\sqrt{400(0.2)(0.8)}} = 3$$

$$\varphi(3) = 0.0044$$

$$P_{400}(104) = \frac{1}{\sqrt{400(0.2)(0.8)}} \varphi(3) =$$

$$= \frac{1}{8} (0.0044) = 0.00055$$

٥) احتمال اصابة الهدف لاحد الرماة يساوي (٧٥ر٠). احسب احتمال بأن الرامي عند رمي (١٠٠) طلقة سيصيب الهدف :

أ) لا أقل عن (٧٠) مرة ولا أكثر من (٨٠)مرة .

ب) لا أكثر من (٧٠) مرة.

في الحالتين يطبق القانون التالي :

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

أ) احتمال انيصيب الرامي الهدف لاقل عن (٧٠) مرة ولا أكثر من (٨٠) مرة :

$$P_{100}(70, 80) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

$$x'' = \frac{80-100(0.75)}{\sqrt{100(0.75)(0.25)}} = 1.154$$

$$x' = \frac{70-100(0.75)}{\sqrt{100\,(0.75)\,(0.25)}} = -1.154$$

$$P_{100}\,(70, 80) \approx \Phi(1.15) + \Phi(1.15) \approx 2\Phi(1.15) \approx$$

$$\approx 2\ (0.3749) \approx 0.7498$$

ب) احتمال ان يصيب الرامي الهدف لا أكثر من (٧٠) مرة :

$$P_{100}\,(0,70) \approx \Phi(-1.15) - \Phi(-17.32)$$

$$\approx -\Phi(1.15) + 0.5$$

$$\approx 0.1251$$

٦) في معمل لانتاج القوارير البلاستيكية احتمال أن تكون القارورة المنتجة مثقوبة يساوي (٠٣ر٠) ٠ احسب الاحتمال بأن التكرار النسبي للقوارير المثقوبة في وجبة انتاجية موءلفة من (١٠٠٠) قارورة ينحرف عن الاحتمال الثابت بقيمة مطلقة لاتزيد عن (٠١ر٠).

المعطيات :

$$n = 100\ ,\ p = 0.03,\quad q = 0.97\ ,\ \varepsilon = 0.01$$

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0.03\right| \leqslant 0.01\right) = 2\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{1000}{0.03(0.97)}}\right)$$

$$= 2\Phi(1.85)$$

$$= 2\ (0.4678) = 0.9356$$

اى باحتمال : 93.56% فان $\frac{m}{1000} = 0.03 \pm 0.01$

اذا كان : $\frac{m}{1000} = 0.02$ فان $m = 20$

واذا كان : $\frac{m}{1000} = 0.04$ فان $m = 40$

وهذا يعني انه باحتمال ٩٣ر٥٦٪ فان عدد القوارير المثقوبة في الوجبة الانتاجية المؤلفة من (١٠٠٠) قارورة لن ينقص عن (٢٠) ولن يزيد عن (٤٠) .

٧) احتمال ان تكون القطعة معطوبة يساوي (١ر٠) ٠ احسب كم قطعة يجب سحبها حتى يكون التكرار النسبي لظهور قطع معطوبة من بين القطع المسحوبة منحرفا عن الاحتمال الثابت بقيمةلاتزيد عن (٠٢ر٠) وذلك باحتمال (٩٩٧٣ر٠)٠

المعطيات :

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leqslant \varepsilon \right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right) = 0.9973$$

$$p = 0.1 \ , \ q = 0.9 \ , \varepsilon = 0.02 \ , \ n = \ ?$$

بما أن :

$$2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right) = 0.9973$$

فان :

$$\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right) = 0.49865$$

من الجدول رقم (٢) :

$$\Phi(3) = 0.49865$$

ومنه :

$$0.02 \sqrt{\frac{n}{0.1(0.9)}} = 3$$

وبالتالي :

$$n = 2025$$

الملاحـــــــــــق

جدول رقم (١)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0122	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

جـــدول رقـــم (٢)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633

تابع جدول رقم (٢)

x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

المراجـــــع

- Calot, Gérard (1975); Cours de Calcul des Probabilités. Dunod, Paris.
- Dwass, Myer (1970). Probability Theory and Applications. W.A. Benjamin, New York.
- Hausner, Melvin (1971). Elementary Probability Theory. Harper & Row, New York.
- Lapin, Lawrence (1973). Statistics for Modern Business Decisions. Harcourt Brace Jovanouich, New York.
- Ross, Sheldon (1976). A First Course in Probability. Macmillan Publishing Co., New York.

الفهـــــرس

المراجـــــع

- Calot, Gérard (1975); Cours de Calcul des Probabilités. Dunod, Paris.
- Dwass, Myer (1970). Probability Theory and Applications. W.A. Benjamin, New York.
- Hausner, Melvin (1971). Elementary Probability Theory. Harper & Row, New York.
- Lapin, Lawrence (1973). Statistics for Modern Business Decisions. Harcourt Brace Jovanouich, New York.
- Ross, Sheldon (1976). A First Course in Probability. Macmillan Publishing Co., New York.

الفهـــــــرس

رقم الصفحـة

مطابع جامعة الملك سعود

مطابع جامعة الملك سعود